

Partie 3 : Les ondes électromagnétiques dans le vide

1 Rappels d'électromagnétisme

1.1 Propriétés du champ électrique en électrostatique

L'interaction entre deux charges ponctuelles $q_{1,2}$ séparées d'une distance r_{12} est décrite par la loi de Coulomb, valable quel que soit le référentiel :

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{1-2}^2} \vec{u}_{r_{1 \rightarrow 2}} = -\vec{F}_{2 \rightarrow 1} \quad (1)$$

où le vecteur unitaire $\vec{u}_{r_{1 \rightarrow 2}}$ pointe de la charge q_1 vers la charge q_2 . Cette force est répulsive lorsque les deux charges sont de même signe, et attractive lorsqu'elles sont de signes contraires. La constante $\epsilon_0 \approx 8.85 \times 10^{-2}$ est la permittivité du vide. Par définition, $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 10^{-7} c^2$ (où c est la vitesse de la lumière) car $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} N \cdot A^{-2}$ et $c^2 \epsilon_0 \mu_0 = 1$. Je

Les deux charges ci-dessus interagissent par l'intermédiaire du *champ électrique* que chacune d'elle produit dans son voisinage. La force $\vec{F}_{1 \rightarrow 2}$ exercée par la charge q_1 sur la charge q_2 est le produit de la charge "réceptrice" q_2 et du champ produit par la charge "source" q_1 (en M_1) au point occupé par la charge q_2 (en M_2) :

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = q_2 \cdot \vec{E}_{1 \rightarrow 2} \quad (2)$$

De façon générale, une charge isolée q_2 située au point M_2 , en présence d'un champ électrique $\vec{E}(M_2)$, subira donc une force \vec{F}_2 de la forme :

$$\vec{F}_2 = q_2 \cdot \vec{E}(M_2) \quad \text{ou bien} \quad \boxed{\vec{F}_e = q\vec{E}} \quad (3)$$

où le champ \vec{E} s'obtient par *superposition* des champs créés par l'ensemble des charges (à l'exclusion de q) occupant l'espace. En supposant une distribution de charges continue, on note $\rho(M)$ la *densité de charge* au voisinage du point M . Celle-ci est égale à la somme algébrique des charges δQ contenues dans le volume élémentaire $d\tau$, divisée par ce volume :

$$\boxed{\rho = \delta Q / d\tau} \quad (4)$$

Le champ électrique résultant \vec{E} au point M_2 peut être exprimé sous la forme d'une intégrale volumique :

$$\vec{E}(M_2) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\text{espace}} \frac{\rho(M_1)}{r_{1 \rightarrow 2}^2} \cdot \vec{u}_{r_{1 \rightarrow 2}} d\tau_{(M_1)} \quad \text{ou} \quad \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\text{espace}} \rho(\vec{r}') \frac{(\vec{r}' - \vec{r})}{\|\vec{r}' - \vec{r}\|^3} d^3 r' \quad (5)$$

En reprenant l'expression du champ électrique (équation 5), en se rappelant que le champ électrique \vec{E} dérive d'un potentiel électrostatique V (i.e. : $\vec{E} = -\vec{\nabla} V$), et en remarquant que $\vec{\nabla} \left(\frac{1}{|r|} \right) = -\frac{\vec{u}_{r_{1 \rightarrow 2}}}{r_{1 \rightarrow 2}^2}$, le potentiel V s'écrit :

$$V(M_2) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\text{espace}} \frac{\rho(M_1)}{|r_{1 \rightarrow 2}|} d\tau_{(M_1)} \quad (6)$$

En pratique, ces intégrales volumiques sont souvent difficiles à calculer pour une distribution quelconque de charges. Néanmoins, dans les cas où la distribution de charges présente certaines symétries, le champ

\vec{E} héritera lui-aussi d'une structure symétrique qui rendra le calcul de l'intégrale plus aisé pour des volumes d'intégration bien choisis.

En revanche, une propriété fondamentale du champ électrique permet de transformer le calcul de l'intégrale volumique en un calcul, plus simple, d'intégrale surfacique. Il s'agit du *théorème de Gauss*, qui indique que le *flux* du champ \vec{E} à travers une surface fermée Σ est égal à la charge totale Q_{int} contenue dans le volume V délimité par Σ , le tout divisé par ϵ_0 :

$$\oint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} \quad \text{avec} \quad Q_{\text{int}} = \int_V \rho d\tau \quad (7)$$

Cette propriété découle de la nature *newtonienne* de l'interaction coulombienne : la force d'interaction électrique associée à \vec{E} est (1) une force centrale (car le vecteur \vec{E} est radial) et (2) elle décroît en $1/r^2$. La force d'attraction gravitationnelle partage ces caractéristiques et obéit elle aussi au théorème de Gauss¹. Le *théorème d'Ostrogradski* permet de transformer cette relation intégrale en une relation locale. Ce théorème donne la relation entre le flux d'un champ vectoriel \vec{C} à travers une surface fermée Σ et l'intégrale volumique de la *divergence* du champ \vec{C} à l'intérieur du volume V correspondant :

$$\oint_{\Sigma} \vec{C} \cdot d\vec{S} = \int_V \text{div } \vec{C} d\tau = \int_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{C}) d\tau \quad (8)$$

où l'on rappelle que $\vec{\nabla}$ est l'opérateur différentiel "nabla"². Le théorème d'Ostrogradski appliqué au théorème de Gauss (équation 7) donne :

$$\oint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) d\tau = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho d\tau \implies \boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}} \quad \text{(MG)} \quad (9)$$

Cette équation est exactement l'équation de *Maxwell-Gauss*. Elle permet de relier le champ \vec{E} à sa source (la distribution de charge).

1. On peut aisément montrer que le théorème de Gauss fonctionne pour une charge q centrée en un point M , en calculant le flux de \vec{E} sur deux sphères centrées sur M et de rayons différents. Il est évident que dans ce cas le champ \vec{E} , qui est radial, est en tout point perpendiculaire à la surface des sphères. La surface d'intégration infinitésimale dS correspond à un angle solide $d\Omega = dS/r^2 = (\vec{u} \cdot d\vec{S})/r^2$, ce qui implique que la surface d'intégration augmente comme le carré du rayon. En revanche, le champ \vec{E} sur la surface d'une sphère centrée en M diminue comme l'inverse du carré du rayon. Par conséquent, le produit de la surface par la valeur du champ (i.e. le flux) demeure constant.

2. *Opérateurs différentiels* : pour U un champ scalaire et \vec{C} un champ vectoriel, on écrit :
$$\begin{cases} \overrightarrow{\text{grad}} U = \vec{\nabla} \cdot U \\ \text{div } \vec{C} = \vec{\nabla} \cdot \vec{C} \\ \overrightarrow{\text{rot}} \vec{C} = \vec{\nabla} \wedge \vec{C} \end{cases}$$

On a aussi : $dU = \overrightarrow{\text{grad}} U \cdot d\vec{M}$ (différentielle totale, vrai quel que soit le système de coordonnées).

En coordonnées cartésiennes, on a : $U = U(x, y, z)$ et $\vec{C} = \begin{pmatrix} C_x(x, y, z) \\ C_y(x, y, z) \\ C_z(x, y, z) \end{pmatrix}$. On en déduit : $\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$.

D'où : $\overrightarrow{\text{grad}} U = \begin{pmatrix} \frac{\partial U}{\partial x} \\ \frac{\partial U}{\partial y} \\ \frac{\partial U}{\partial z} \end{pmatrix}$; $\text{div } \vec{C} = \frac{\partial C_x}{\partial x} + \frac{\partial C_y}{\partial y} + \frac{\partial C_z}{\partial z}$; $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{C} = \begin{pmatrix} \frac{\partial C_z}{\partial y} - \frac{\partial C_y}{\partial z} \\ \frac{\partial C_x}{\partial z} - \frac{\partial C_z}{\partial x} \\ \frac{\partial C_y}{\partial x} - \frac{\partial C_x}{\partial y} \end{pmatrix}$.

Laplacien : Le Laplacien $\Delta = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \vec{\nabla}^2$ est un opérateur pouvant être appliqué à un champ scalaire U ou à un champ vectoriel \vec{C} . On parle alors de Laplacien scalaire ou de Laplacien vectoriel, respectivement. Il s'écrit, en coordonnées cartésiennes :

Laplacien scalaire : $\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$. Laplacien vectoriel : $\Delta \vec{C} = \begin{pmatrix} \Delta C_x \\ \Delta C_y \\ \Delta C_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 C_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 C_x}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 C_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 C_y}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 C_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 C_z}{\partial z^2} \end{pmatrix}$

Propriétés : $\text{div} (\overrightarrow{\text{grad}} U) = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} U) = (\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}) U = \Delta U$; $\text{div} (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{C}) = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{C}) = 0$
 $\overrightarrow{\text{rot}} (\overrightarrow{\text{grad}} U) = \vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} U) = (\vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla}) U = \vec{0}$
 $\overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{C} = \vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{C}) = (\vec{\nabla} \cdot \vec{C}) \cdot \vec{\nabla} - (\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}) \cdot \vec{C} = \overrightarrow{\text{grad}} (\text{div } \vec{C}) - \Delta \vec{C}$.

Enfin, commé évoqué brièvement ci-dessus, la force d'interaction coulombienne étant conservative, il est possible d'écrire le champ électrique comme (moins) le gradient d'un *potentiel électrostatique* V :

$$\boxed{\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V = -\overrightarrow{\nabla} V} \quad (10)$$

Puisque \vec{E} peut s'écrire sous la forme d'un gradient, et en remarquant que $\overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{\nabla} = \vec{0}$, en prenant le rotationnel de l'équation 10 on déduit que :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = \vec{0} \quad \iff \quad \boxed{\overrightarrow{\nabla} \wedge \vec{E} = \vec{0}} \quad (11)$$

Cette dernière propriété intrinsèque du champ électrique ne comptera pas parmi les équations de Maxwell, car elle n'est valable qu'en électrostatique. Une version modifiée de cette équation sera introduite par la suite.

Pour terminer, en prenant la divergence de l'équation 10, on aboutit à l'*équation de Poisson de l'électrostatique* :

$$\boxed{\Delta V + \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0} \quad (12)$$

où l'opérateur $\Delta = \overrightarrow{\nabla}^2$ est l'opérateur Laplacien. Cette équation relie le potentiel électrique à la source du champ électrique.

1.2 Propriétés du champ magnétique en magnétostatique

La force magnétique subie par une charge q en mouvement à la vitesse \vec{v} en présence d'un champ magnétique \vec{B} s'écrit :

$$\boxed{\vec{F}_m = q \vec{v} \wedge \vec{B}} \quad (13)$$

À la différence de l'expression de l'interaction coulombienne (équation 1), cette expression fait directement apparaître le champ magnétique, sans que ne soit décrite la cause de ce champ. Cette cause est mise en lumière par la *loi de Biot et Savart* : les courants électriques produisent un champ magnétique dans leur voisinage. Cette conclusion a été tirée de l'expérience, en constatant qu'une boucle de courant électrique produisait sur une boucle de courant voisine une force similaire à celle que produirait un aimant.

Mais d'abord, qu'est-ce que le courant électrique ? Le courant électrique est la manifestation du *mouvement* collectif d'un grand nombre de charges. La densité de courant \vec{j} est définie comme le nombre N de charges q par unité de volume (i.e. la densité de charge ρ) se déplaçant à la vitesse \vec{v} au sein de ce volume :

$$\boxed{\vec{j} = Nq\vec{v} = \rho\vec{v}} \quad (14)$$

Il s'agit donc d'une définition locale. En réalité, chaque charge peut avoir un vecteur vitesse différent. Le vecteur \vec{v} est ici un vecteur vitesse "moyen". L'intensité du courant électrique I est simplement égale au nombre de charges passant à travers une surface Σ par unité de temps. Elle est obtenue en intégrant la densité de courant sur la surface Σ :

$$\boxed{I = \int_{\Sigma} \vec{j} \cdot \vec{n} \, dS = \int_{\Sigma} \vec{j} \cdot \overrightarrow{dS}} \quad (15)$$

On constate ici que si les porteurs de charges sont de charge négative (par exemple des électrons libres), le courant I circule dans la direction opposée à la direction de déplacement physique des porteurs de charge.

Au passage, de cette définition, on peut déduire une *loi de conservation de la charge* en considérant une surface Σ fermée : puisque la surface est fermée, le courant total qui la traverse est égal à la variation temporelle de la charge intérieure :

$$\oint_{\Sigma} \vec{j} \cdot \vec{n} \, dS = -\frac{d}{dt} (Q_{\text{int}}) \quad \text{avec} \quad Q_{\text{int}} = \int_V \rho \, d\tau \quad (16)$$

L'application du théorème d'Ostrogradski (équation 8) permet de transformer la loi de conservation de la charge sous forme intégrale en sa forme locale :

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}} \quad (\text{CC}) \quad (17)$$

Finalement, la loi de Biot et Savart permet de relier le champ magnétique \vec{B} au point M_2 résultant d'une boucle de courant parcourue par un courant d'intensité I au point M_1 :

$$\vec{B}(M_2) = \frac{\mu_o}{4\pi} \oint_{\Gamma} \frac{I \vec{dl}_{(M_1)} \wedge \vec{u}_{r_{1 \rightarrow 2}}}{r_{1 \rightarrow 2}^2} \quad (18)$$

En procédant à la substitution $I \oint_{\Gamma} \vec{dl} \equiv \int_{\text{espace}} \vec{j} d\tau$, cette relation permet d'aboutir à l'expression du champ magnétique résultant d'une distribution spatiale quelconque de courants \vec{j} :

$$\vec{B}(M_2) = \frac{\mu_o}{4\pi} \int_{\text{espace}} \frac{\vec{j}(M_1) \wedge \vec{u}_{r_{1 \rightarrow 2}}}{r_{1 \rightarrow 2}^2} d\tau_{(M_1)} \quad \text{ou} \quad \vec{B} = \frac{\mu_o}{4\pi} \int_{\text{espace}} \frac{\vec{j}(\vec{r}') \wedge \vec{r}'(\vec{r}')}{r^3} d^3 r' \quad (19)$$

De cette relation, on déduit que le champ magnétique \vec{B} est un *vecteur axial*. Encore une fois, la forme très spéciale prise par l'expression du champ magnétique (décroissance en $1/r^2$) permet d'aboutir à une relation d'un intérêt pratique plus large. Il s'agit du *théorème d'Ampère*³. Ce théorème indique que la circulation du champ \vec{B} sur un contour Γ est égale à l'intensité du courant électrique passant à travers la surface Σ délimitée par Γ , le tout divisé par $\epsilon_o c^2$:

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \frac{I \text{ à travers } \Sigma}{\epsilon_o c^2} \quad \text{avec} \quad I \text{ à travers } \Sigma = \int_{\Sigma} \vec{j} \cdot d\vec{S} \quad (20)$$

Le *théorème de Stokes* permet de transformer cette relation intégrale en une relation locale. Ce théorème donne la relation entre la circulation d'un champ vectoriel \vec{C} le long d'un contour fermé Γ et l'intégrale surfacique du *rotationnel* du champ \vec{C} à travers la surface Σ correspondante :

$$\oint_{\Gamma} \vec{C} \cdot d\vec{l} = \int_{\Sigma} \text{rot } \vec{C} \cdot d\vec{S} = \int_{\Sigma} (\vec{\nabla} \wedge \vec{C}) \cdot d\vec{S} \quad (21)$$

Le théorème de Stokes appliqué au théorème d'Ampère (équation 20) donne :

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_{\Sigma} (\vec{\nabla} \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_o c^2} \int_{\Sigma} \vec{j} \cdot d\vec{S} \implies \boxed{\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_o \vec{j}} \quad (\text{MA}^*) \quad (22)$$

Cette dernière équation permet de relier \vec{B} à sa source. C'est la version "statique" de l'équation de *Maxwell-Ampère*. Elle n'est valable que lorsque les densités de charges demeurent immobiles (*électrostatique*) et tant que les courants restent permanents (*magnétostatique*), c'est à dire si $\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$. Elle ne sera plus valable en électrodynamique.

Enfin, en repartant de la structure axiale du vecteur champ magnétique, il est possible de dériver une propriété importante. En prenant la divergence de l'équation 19⁴ :

$$\text{div } \vec{B} \propto \text{div} \left(\frac{\vec{j} \wedge \vec{u}_r}{r^2} \right) = \vec{\nabla} \cdot \left(\vec{j} \wedge \frac{\vec{r}}{r^3} \right) = \frac{\vec{r}}{r^3} \cdot \left\{ \vec{\nabla} \wedge (\vec{j}) \right\} - \vec{j} \cdot \left\{ \vec{\nabla} \wedge \left(\frac{\vec{r}}{r^3} \right) \right\} \quad (23)$$

Or, les deux termes entre accolades s'annulent. En effet, le premier terme est nul puisque $\vec{\nabla} \wedge (\vec{j}) = \vec{0}$ (car l'opérateur $\vec{\nabla}$ agit sur les fonctions dépendant de la variable \vec{r} alors que \vec{j} dépend de \vec{r}').

3. À la différence du théorème de Gauss, il est un peu plus délicat de démontrer que le théorème d'Ampère. On peut cependant montrer que le théorème est vérifié pour un fil rectiligne parcouru par un courant I , en calculant la circulation de \vec{B} sur une série de cercles centrés sur le fil, et de normales parallèles au fil. Voir par exemple Feynman et al. (1999) pour une méthode de résolution utilisant le potentiel vecteur.

4. En se rappelant que : $\vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \wedge \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) - \vec{A} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{B})$.

Pour le second terme, on a :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\vec{r}}{r^3} &= \overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{-1}{|\vec{r}|} \right) = \overrightarrow{\nabla} \left(\frac{-1}{r} \right) \\ \overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{\nabla} &= \vec{0} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{\nabla} \wedge \left(\frac{\vec{r}}{r^3} \right) = \overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{\nabla} \left(\frac{-1}{r} \right) = \vec{0} \quad (24)$$

Finalement, on obtient une nouvelle équation indiquant que le champ \vec{B} est à flux conservatif :

$$\boxed{\text{div } \vec{B} = 0} \quad (\mathbf{M}\Phi) \quad (25)$$

Cette équation est parfois appelée équation de *Maxwell-Flux*. Mise en rapport avec l'expression de la divergence du champ électrique (équation 9), cette équation indique qu'il n'existe pas de "charges magnétiques".

Puisque la divergence du champ magnétique est nulle, il est possible d'exprimer \vec{B} sous la forme du rotationnel d'un champ vectoriel \vec{A} :

$$\text{div } \vec{B} = 0 \quad \Rightarrow \quad \exists \vec{A} \text{ tel que : } \vec{B} = \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} = \overrightarrow{\nabla} \wedge \vec{A} \quad (26)$$

Le champ \vec{A} est appelé le *potentiel vecteur*. Une telle propriété est également vérifiée pour tout champ vectoriel \vec{A}' tel que $\vec{A}' = \vec{A} + \overrightarrow{\text{grad}} V = \vec{A} + \overrightarrow{\nabla} V$, avec V un champ scalaire quelconque⁵. Il convient donc de fixer cette "constante d'intégration" afin de savoir, de façon univoque, de quel champ vectoriel \vec{A} nous parlons. Ce choix s'appelle le *choix d'une jauge*. En électrostatique, la *jauge de Coulomb* est généralement utilisée⁶ :

$$\text{div } \vec{A} = \overrightarrow{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 \quad (\text{jauge de Coulomb}) \quad \Rightarrow \quad \Delta V = 0 \quad (\text{équation de Laplace}) \quad (27)$$

En adoptant ce choix de jauge, et en repartant de la forme locale du théorème d'Ampère :

$$\overrightarrow{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{j} = \overrightarrow{\nabla} \wedge (\overrightarrow{\nabla} \wedge \vec{A}) = \overrightarrow{\nabla} (\overrightarrow{\nabla} \cdot \vec{A}) - (\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{\nabla}) \cdot \vec{A} = -\overrightarrow{\nabla}^2 \cdot \vec{A} = -\Delta \vec{A} \quad (28)$$

D'où l'équation de Poisson de la magnétostatique :

$$\boxed{\Delta \vec{A} + \mu_0 \vec{j} = \vec{0}} \quad (29)$$

Il s'agit ici d'une équation vectorielle contenant trois équations de Poisson scalaires portant chacune sur une des composantes du vecteur \vec{j} . Les solutions de chacune de ces équations scalaires prennent la même forme qu'en électrostatique (équation 12), ce qui permet de relier explicitement le potentiel vecteur aux sources de courant par l'intermédiaire d'une relation intégrale :

$$\vec{A}(2) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\text{espace}} \frac{\vec{j}(1) d\tau_1}{r_{12}} \quad (30)$$

De cette dernière intégrale, on déduit que le potentiel vecteur \vec{A} est un vecteur polaire vis-à-vis des sources de courant \vec{j} produisant le champ magnétique \vec{B} , tout comme le champ électrique \vec{E} est polaire vis-à-vis de charges ρ qui lui donnent naissance. Le fait que le vecteur \vec{E} soit polaire implique qu'il vérifie des *propriétés de symétrie* vis-à-vis de la distribution des charges ρ : i.e. si la distribution de charge présente un plan de symétrie, alors le champ \vec{E} est également symétrique par rapport à ce plan. Le vecteur \vec{B} étant un vecteur axial, ces propriétés sont inversées : si la distribution de courant est symétrique par rapport à un plan, alors le champ \vec{B} sera *antisymétrique* par rapport à ce plan, et inversement si la distribution est antisymétrique, alors le champ sera symétrique. Puisque le potentiel vecteur \vec{A} est un vecteur polaire, ses propriétés de symétrie sont les mêmes que celles de \vec{E} : le potentiel vecteur \vec{A} est symétrique vis-à-vis des courants \vec{j} . Ceci le rend plus facile à manipuler que \vec{B} . Ainsi, il est souvent plus aisé, lorsque l'on veut calculer le champ \vec{B} , de procéder d'abord au calcul de \vec{A} grâce à l'équation de Poisson (équation 29), puis de prendre le rotationnel de \vec{A} pour en déduire \vec{B} , plutôt que de calculer directement le vecteur axial \vec{B} en intégrant la loi de Biot et Savart (équation 19).

5. Ces propriétés découlent du théorème de Helmholtz, qui stipule que tout champ vectoriel \vec{B} (moyennant certaines hypothèses de continuité sur \vec{B}) peut être décomposé (de façon non unique) sous la forme de la somme du rotationnel d'un champ vectoriel \vec{A} et du gradient d'un champ scalaire V , i.e. : $\vec{B} = \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} - \overrightarrow{\text{grad}} V$.

6. En électrodynamique (i.e. lorsque les champs \vec{E} et \vec{B} changent au cours du temps), la jauge de Lorenz sera utilisée : $\overrightarrow{\nabla} \cdot \vec{A} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t}$ (voir équation 55).

1.3 Le phénomène d'induction : vers l'électromagnétisme

Jusqu'à présent, on a vu que les champs électrique et magnétique prennent naissance sous l'effet de causes distinctes : les charges produisent un champ électrique, alors que les charges en mouvement sont responsables de l'apparition du champ magnétique. Cette séparation entre les phénomènes électriques et magnétiques n'est vérifiée que si les charges demeurent constantes et immobiles (électrostatique), ou si la vitesse des charges en tout point de l'espace ne varie pas dans le temps (magnétostatique)⁷. Mais que se passe-t-il si la vitesse d'une charge change ? Le déplacement d'une charge initialement immobile produira une modification du champ électrique environnant. Cependant, si l'on place un observateur à grande distance de la charge, celui-ci ne recevra pas immédiatement l'information correspondant à cette perturbation (la modification du champ), car cette information ne peut pas se propager à une vitesse supérieure à la vitesse de la lumière. On voit immédiatement que les équations dont nous disposons jusqu'à présent ne sont pas suffisantes pour caractériser la propagation de cette information, puisqu'elles ne contiennent pas le *temps*. Pour cela, il va falloir étudier les phénomènes *dynamiques*, dans lesquels les champs (électrique ou magnétique) varient.

C'est précisément l'objet de l'expérience de Laplace (Figure 1). Historiquement, cette expérience a permis de mettre en lumière le phénomène d'*induction électromagnétique*. Sa description est donc intéressante pour bien saisir l'impact des variations temporelles des champs. Dans cette expérience, un générateur de courant continu délivrant un courant d'intensité constante est connecté à un circuit rectangulaire dont un des côtés est constitué d'un barreau métallique mobile, capable de rouler sur les deux côtés adjacents du circuit, comme sur des rails. Le deuxième élément de l'expérience est un champ magnétique \vec{B} uniforme de direction normale au plan du circuit, et dont on est capable de faire varier l'intensité. Le champ \vec{B} règne dans la région de l'espace dans laquelle se trouve la partie mobile du circuit (le barreau).

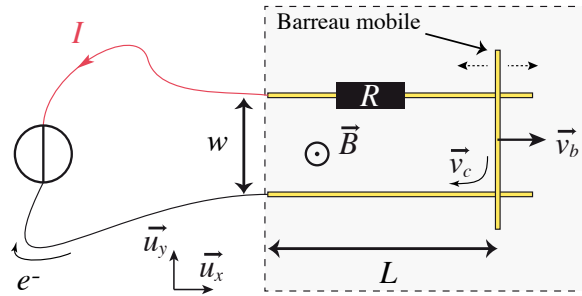


FIGURE 1

Dans l'expérience, tant que le courant circule avec une intensité constante et que le champ \vec{B} demeure nul, rien ne se passe. À partir de l'instant initial, lorsque l'on augmente la valeur du champ \vec{B} , on observe que le barreau se met en mouvement. Ce mouvement est dû à l'apparition de la *force de Laplace* \vec{F}_L . Cette force est la résultante des forces magnétiques (équation 13) agissant sur chaque porteur de charge (ici les électrons de conduction : $q = -e$) :

$$\vec{F}_{m\perp} = q(\vec{v}_c \wedge \vec{B}) = -qv_c B \cdot \vec{u}_x \quad (31)$$

En introduisant une densité de charges N par unité de volume, la force de Laplace agissant sur la partie mobile du circuit de longueur dl , correspondant à un volume $d\tau$, s'écrit :

$$d\vec{F}_L = N \cdot d\tau \cdot \vec{F}_{m\perp} = Nq \cdot d\tau \cdot v_c B \cdot \vec{u}_x = IB \cdot dy \cdot \vec{u}_x \quad \text{où : } \vec{j} \cdot d\tau = Nq\vec{v}_c \cdot d\tau = I \cdot dl \cdot \vec{u}_y \quad (32)$$

La force de Laplace est transverse à la direction de circulation des porteurs de charge. Initialement, elle ne travaille donc pas. Cependant, dès lors que le barreau se met en mouvement à la vitesse $\vec{v}_b = v_b \cdot \vec{u}_x$, la force de Laplace est alors parallèle au mouvement global du barreau. La force de Laplace cède donc au barreau une puissance totale \mathcal{P}_L égale à :

$$\mathcal{P}_L = \vec{F}_L \cdot \vec{v}_b = I \cdot B v_b w \quad (33)$$

Cette expression peut être interprétée comme le produit de l'intensité du courant et de la *variation du flux du champ magnétique* (noté Φ) à travers la surface Σ du circuit :

$$\mathcal{P}_L = I \cdot \left\{ \frac{d\Phi}{dt} \right\} \quad \text{avec} \quad \Phi = \int_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad (34)$$

7. Le terme "magnétostatique" peut être trompeur : les charges sont bien en mouvement, mais leur vitesse ne dépend que de leur position. En d'autres termes, en un point donné, la vitesse "locale" des charges ne change pas au cours du temps. Elle peut cependant changer d'un point à l'autre, par exemple si les charges se déplacent le long d'un circuit fermé. Dans ce cas, les hypothèses de la magnétostatique sont vérifiées si le courant électrique I ne dépend pas du temps.

La force de Laplace engendre alors une accélération du barreau, se traduisant par une augmentation de son énergie cinétique sous l'effet d'un apport net de travail. Clairement, un effet supplémentaire doit intervenir afin de compenser cette production d'énergie qui ne saurait être "gratuite".

Le facteur manquant dans l'analyse ci-dessus est celui produit par la *force électromotrice de Lorentz* ou *f.é.m induite*. Cette force est égale à la composante de la force magnétique *totale* agissant *dans la direction parallèle au courant de conduction*. Elle n'apparaît que lorsque les charges acquièrent une vitesse perpendiculaire à la direction de conduction du courant (i.e. si $\vec{v}_b \neq 0$). Si cette force est dirigée dans la même direction que \vec{v}_c , alors son travail est moteur, c'est à dire qu'elle a tendance à accélérer les électrons. De ce qui précède, on anticipe que cette force sera plutôt résistante.

En prenant en compte l'expression complète de la vitesse $\vec{v} = \vec{v}_c + \vec{v}_b$, la puissance de la force magnétique totale s'écrit :

$$dP = Nq d\tau \underbrace{(\vec{v} \wedge \vec{B})}_{=0} \cdot \vec{v} = Nq d\tau \left\{ (\vec{v}_c + \vec{v}_b) \wedge \vec{B} \right\} \cdot (\vec{v}_c + \vec{v}_b) = Nq d\tau \left\{ (\vec{v}_c \wedge \vec{B}) \cdot \vec{v}_b + (\vec{v}_b \wedge \vec{B}) \cdot \vec{v}_c \right\} \quad (35)$$

La puissance d'une telle force est clairement nulle, puisqu'elle est par définition appliquée perpendiculairement au vecteur vitesse de chaque porteur de charge. On en déduit que :

$$(\vec{v}_b \wedge \vec{B}) \cdot \vec{v}_c = -(\vec{v}_c \wedge \vec{B}) \cdot \vec{v}_b \quad (36)$$

En notant dP_e la puissance électrique fournie par la f.é.m induite :

$$dP_e = Nq d\tau (\vec{v}_b \wedge \vec{B}) \cdot \vec{v}_c = I \cdot (\vec{v}_b \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{l} \cdot \vec{u}_y \quad (37)$$

On obtient la relation :

$$P = P_e + P_L = 0 \quad \implies \quad P_e = -P_L \quad (38)$$

On voit donc que *le travail moteur de la force de Laplace est alimenté par le travail résistant de la force électromotrice induite*. Une autre manière de voir le problème est d'imaginer que l'effet de la force magnétique est de "dévier" les porteurs de charge. Leur vecteur vitesse va donc acquérir une composante selon \vec{u}_y , au détriment de la composante selon \vec{u}_x , car la norme de la vitesse des charges doit rester constante en vertu du théorème de l'énergie cinétique (le travail total des forces extérieures est nul).

Ensuite, en décomposant l'expression du travail de la f.é.m. induite (équation 37) sous la forme d'une charge ($Nq d\tau$), multipliée par un *champ électromoteur* ($\vec{E}_m = \vec{v}_b \wedge \vec{B}$), multiplié par un déplacement infinitésimal (\vec{v}_c), on peut exprimer la puissance dissipée sous la forme de la loi d'Ohm, c'est à dire comme le produit de l'intensité du courant I et de la circulation e du champ électromoteur \vec{E}_m le long du circuit (homogène à une tension électrique) :

$$P_e = I \cdot e \quad \text{avec} \quad e = \oint_{\Gamma} \vec{E}_m \cdot (d\vec{l} \cdot \vec{u}_y) = \oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (39)$$

On déduit alors des équations 34 et 39 la *loi de Faraday* :

$$\boxed{e = -\frac{d\Phi}{dt}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \Phi = \int_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{S} \\ e = \oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} \end{cases} \quad (40)$$

En d'autres termes, la variation du flux magnétique au travers du circuit (résultant par exemple d'une augmentation de l'intensité du champ magnétique extérieur) produit l'apparition d'une force électromotrice donnant elle-même naissance à un courant induit. Le champ magnétique créé par ce courant induit est de direction opposée au champ extérieur, de telle sorte que l'effet de l'induction est de s'opposer au champ extérieur qui en est la cause. De manière plus générale, les effets magnétiques, électrocinétiques et mécaniques de l'induction sont orientés de façon à s'opposer à leurs causes (*loi de Lenz*).

Finalement, après application du théorème de Stokes, la forme locale de la loi de Faraday s'écrit :

$$-\frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{S} \right) = \int_{\Sigma} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_{\Sigma} \overrightarrow{\nabla} \wedge \vec{E} \cdot d\vec{S} \quad \implies \quad \boxed{\overrightarrow{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}} \quad \text{(MF)} \quad (41)$$

Cette dernière équation est l'équation de *Maxwell-Faraday*. C'est la première équation à relier explicitement les champs électrique et magnétique.

2 Les équations de Maxwell dans le vide

2.1 Généralisation des équations de l'électrostatique/magnétostatique

Les quatre équations de Maxwell s'écrivent :

$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$	(MG)	flux de \vec{E} à travers une surface fermée = $\frac{\text{charge intérieure}}{\epsilon_0}$
$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$	(MΦ)	flux de $\vec{B} = 0$
$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	(MF)	circulation de \vec{E} le long d'une courbe fermée = $-\frac{\partial}{\partial t}$ (flux de \vec{B} à travers la surface)
$c^2 \vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$	(MA)	c^2 (circulation de \vec{B}) = $\frac{\text{courant à travers la surface}}{\epsilon_0} + \frac{\partial}{\partial t}$ (flux de \vec{E})

(42)

À ces équations s'ajoute l'équation de conservation de la charge :

$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$	(CC)	flux de \vec{j} à travers une surface fermée = variation de la charge intérieure
--	-------------	--

(43)

Les équations **(MΦ)** et **(MF)** sont les équations structurelles du champ, c'est à dire qu'elles ne dépendent pas des charges ou des courants donnant naissance aux champs \vec{E} et \vec{B} . En revanche, les équations **(MG)** et **(MA)** relient les champs à leurs sources. Toutes ces équations sont déduites directement de la forme locale des théorèmes de l'électrostatique et de la magnétostatique. Seule l'équation de Maxwell-Ampère **(MA)** a été modifiée par l'introduction du terme supplémentaire $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$. Il s'agit là de la contribution de Maxwell. Voyons pourquoi ce terme supplémentaire est nécessaire. En repartant de l'expression "statique" de l'équation de Maxwell-Ampère (équation 22, **MA***), et en prenant la divergence de cette équation, on obtient :

$$\vec{\nabla} \cdot (\mathbf{MA}^*) \implies \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{B}) = \mu_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0 \implies \oint_{\Sigma} \vec{j} \cdot d\vec{S} = 0, \forall \Sigma \xrightarrow{\text{(CC)}} \rho_{\text{intérieur}} = \text{cste} \quad (44)$$

Cette relation n'est donc vérifiée que dans deux conditions : soit les charges sont immobiles (hypothèse de l'électrostatique), soit les courants sont permanents (hypothèse de la magnétostatique). Mais si $\frac{\partial \rho}{\partial t} \neq 0$ (charges mobiles ou courants variables), l'équation de Maxwell-Ampère ne satisfait pas la loi de conservation de la charge.

En reprenant le même raisonnement, mais en repartant cette fois de la forme complète de l'équation de Maxwell-Ampère **(MA)** :

$$\vec{\nabla} \cdot (\mathbf{MA}) \implies \vec{\nabla} \cdot (c^2 \vec{\nabla} \wedge \vec{B}) = \mu_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = -\frac{1}{\epsilon_0} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho}{\epsilon_0} \right) = 0 \quad (45)$$

La loi de conservation de la charge est donc vérifiée quelle que soit la surface Σ (et même si $\frac{\partial \rho}{\partial t} \neq 0$).

2.2 Mise en évidence de l'équation d'onde

2.2.1 Champs électrique et magnétique

Ici, comme dans la suite, on se placera dans une région de l'espace dépourvue de charges ($\rho = 0$) et de courants ($\vec{j} = 0$), c'est à dire dans le *vide*. On remarque que les équations **(MF)** et **(MA)** introduisent un couplage entre les champs \vec{E} et \vec{B} . En combinant de façon astucieuse les équations de Maxwell, il est

possible de découpler ces équations :

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \wedge (\mathbf{MF}) &\implies \vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{E}) = (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) \cdot \vec{\nabla} - (\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}) \cdot \vec{E} \stackrel{(\mathbf{MF})}{=} \vec{\nabla} \wedge \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \\ &= \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \vec{\nabla}^2 \cdot \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{c^2} \left(\frac{\vec{j}}{\epsilon_0} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \right] \end{aligned} \quad (46)$$

$$\implies \boxed{\vec{\nabla}^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}} \quad (\text{dans le vide}) \quad (47)$$

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \wedge (\mathbf{MA}) &\implies \vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{B}) = (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) \cdot \vec{\nabla} - (\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}) \cdot \vec{B} \stackrel{(\mathbf{MA})}{=} \vec{\nabla} \wedge \left(\frac{\vec{j}}{\epsilon_0} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \\ &= \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) - \vec{\nabla}^2 \cdot \vec{B} = \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{c^2} \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \right] \end{aligned} \quad (48)$$

$$\implies \boxed{\vec{\nabla}^2 \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0}} \quad (\text{dans le vide}) \quad (49)$$

... où l'on rappelle que : $c^2 \epsilon_0 \mu_0 = 1$.

2.2.2 Potentiel scalaire, potentiel vecteur

La généralisation de l'équation de Maxwell-Ampère nécessite une modification du choix de la jauge utilisée pour définir le potentiel vecteur. Pour choisir une nouvelle jauge, il faut repartir des équations structurelles de Maxwell ($\mathbf{M}\Phi$) et (\mathbf{MF}) :

$$(\mathbf{M}\Phi) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (50)$$

$$\Leftrightarrow \exists \vec{A} \text{ t.q. } \vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} \quad (\text{vrai aussi } \forall \vec{A}' \text{ t.q. } \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} \Psi) \quad (51)$$

$$(\mathbf{MF}) \quad \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) = -\vec{\nabla} \wedge \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) \implies \vec{\nabla} \wedge \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = \vec{0} \quad (52)$$

$$\Leftrightarrow \exists V \text{ t.q. } \vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\vec{\nabla} V \quad (\text{ou : } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla} V) \quad (\text{vrai aussi } \forall V' \text{ t.q. } V' = V + \text{cste}) \quad (53)$$

Le choix d'une jauge revient à fixer les constantes d'intégration afin de déterminer de façon unique l'expression du potentiel V et du potentiel vecteur \vec{A} . Soient $(\vec{A}'; V')$ deux champs scalaires alternatifs pour lesquels les équations ci-dessus sont vérifiées, avec $\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} \Psi$. On a alors :

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V' - \frac{\partial \vec{A}'}{\partial t} = -\vec{\nabla} V' - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \Psi) = -\vec{\nabla} \left(V' + \frac{\partial \Psi}{\partial t} \right) - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\vec{\nabla} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (54)$$

Donc la condition $\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} \Psi$ impose que : $V' = V - \frac{\partial \Psi}{\partial t}$. Les champs \vec{A} et V ne sont donc pas indépendants, ce qui signifie qu'il suffit de se donner un \vec{A} particulier pour pouvoir en déduire le V correspondant. Auparavant, on avait fait le choix : $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ (équation 27, jauge de Coulomb). Un choix différent est à présent nécessaire pour pouvoir relier entre elles les variations temporelles des potentiels. On introduit la *jauge de Lorenz* :

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t}} \quad (\text{jauge de Lorenz}) \quad (55)$$

Grâce à ce choix de jauge, on peut désormais relier les potentiels aux sources du champ en utilisant les deux équations de Maxwell restantes **(MG)** et **(MA)** :

$$\text{(MG)} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \vec{\nabla} \cdot \left(-\vec{\nabla} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0 \implies \boxed{\vec{\nabla}^2 V - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0 \quad (\text{dans le vide})} \quad (56)$$

$$\text{(MA)} \quad \vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - (\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}) \cdot \vec{A} = \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(-\vec{\nabla} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) \quad (57)$$

$$\implies \vec{\nabla}^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = \mu_0 \vec{j} - \vec{\nabla} \cdot \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} \right) \implies \boxed{\vec{\nabla}^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = 0 \quad (\text{dans le vide})} \quad (58)$$

2.3 Ondes électromagnétiques

En combinant les équations de Maxwell dans le vide, on constate que les champs électrique et magnétique obéissent à l'équation d'onde. Cela signifie que les champs \vec{E} et \vec{B} se propagent dans le temps et dans l'espace, et possèdent une structure d'onde. De même, les potentiels V et \vec{A} ont également une structure d'onde.

La solution générale de l'équation d'onde pour les champs \vec{E} et \vec{B} , dans le cas particulier où ces champs possèdent une structure d'onde plane⁸, s'écrit, au point M et à l'instant t :

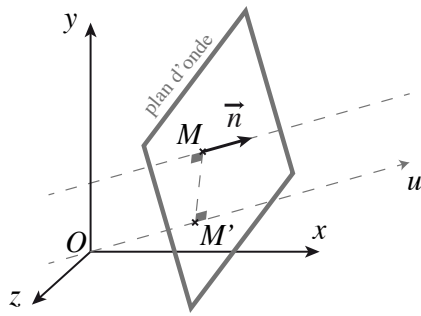


FIGURE 2

$$\vec{E}(u, t) = \vec{E}(M, t) = \vec{E}_1 \left(t - \frac{\overrightarrow{OM} \cdot \vec{n}}{c} \right) + \vec{E}_2 \left(t + \frac{\overrightarrow{OM} \cdot \vec{n}}{c} \right) \quad (59)$$

$$\vec{B}(u, t) = \vec{B}(M, t) = \vec{B}_1 \left(t - \frac{\overrightarrow{OM} \cdot \vec{n}}{c} \right) + \vec{B}_2 \left(t + \frac{\overrightarrow{OM} \cdot \vec{n}}{c} \right) \quad (60)$$

où $\overrightarrow{OM} = \vec{r} = r \cdot \vec{e}_r = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z$ est le vecteur indiquant la position du point M , $\vec{n} = n_x\vec{u}_x + n_y\vec{u}_y + n_z\vec{u}_z$ est un vecteur normal au plan d'onde considéré, et $u = \vec{n} \cdot \vec{r} = n_x \cdot x + n_y \cdot y + n_z \cdot z$ est la distance entre le plan d'onde et l'origine (Figure 2). Les

expressions des champs \vec{E} et \vec{B} dépendent uniquement de la variable spatiale u car les champs ont la même valeur sur le plan d'onde défini par $u = \text{cste}$.

Dans les expressions ci-dessus, les champs \vec{E} et \vec{B} se propagent selon une même direction \vec{n} , mais ils ne partagent aucune autre caractéristique commune, a priori. Néanmoins, les équations de Maxwell indiquent que les champs \vec{E} et \vec{B} sont reliés, au travers de relations entre leurs dérivées partielles par rapport aux variables spatiales et temporelles. Afin de mettre en évidence ce lien entre \vec{E} et \vec{B} , il est nécessaire d'injecter les expressions "ondulatoires" de \vec{E} et \vec{B} dans les équations de Maxwell appropriées. Pour cela, calculons les dérivées partielles de \vec{E} et \vec{B} .

Puisque les champs varient uniquement selon la direction u , ils ne dépendent plus que de deux variables (u, t) , en lieu et place des quatre variables (x, y, z, t) . En identifiant le champ \vec{C} soit à \vec{E} soit à \vec{B} , on peut donc écrire le champ sous la forme $\vec{C}(x, y, z, t) = \vec{C}(u, t)$. Alors, en ne conservant que la partie des champs se propageant dans la direction des u croissants, et en utilisant $\partial y / \partial x = \partial z / \partial x = \partial t / \partial x = 0$:

$$\frac{\partial C_x}{\partial x} = \left(\frac{\partial \tilde{C}_x}{\partial u} \right) \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = n_x \cdot \left(\frac{\partial \tilde{C}_x}{\partial u} \right) \quad (61)$$

Puisque cette relation s'applique également aux coordonnées y et z , on tire la propriété :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{C} \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{\partial \tilde{C}_x}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{C}_y}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{C}_z}{\partial z} = \vec{n} \cdot \frac{\partial \vec{C}}{\partial u} \implies \boxed{\vec{\nabla} = \vec{n} \cdot \frac{\partial}{\partial u}} \quad (62)$$

8. On rappelle que lorsqu'on se situe à grande distance des sources, et qu'on se place dans une région de l'espace de faible dimensions, alors une onde quelconque peut être considérée comme localement plane.

Pour la dérivée partielle par rapport au temps, on pose le changement de variable :

$$T = t - \frac{\vec{r} \cdot \vec{n}}{c} = t - \frac{n_x \cdot x + n_y \cdot y + n_z \cdot z}{c} = t - \frac{u}{c}, \quad (63)$$

Ce qui donne (en oubliant la notation “ \tilde{C} ”) :

$$\frac{\partial C_x}{\partial t} = \left(\frac{\partial C_x}{\partial T} \right) \cdot \left(\frac{\partial T}{\partial t} \right) = \left(\frac{\partial C_x}{\partial T} \right) \Rightarrow \vec{\nabla} = -\frac{\vec{n}}{c} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \Rightarrow \begin{cases} \vec{\nabla} \cdot = -\frac{\vec{n}}{c} \cdot \frac{\partial}{\partial t} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{n} \cdot) \\ \vec{\nabla} \wedge = -\frac{\vec{n}}{c} \wedge \frac{\partial}{\partial t} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{n} \wedge) \end{cases} \quad (64)$$

Il est alors possible d’appliquer les équations de Maxwell aux champs \vec{E} et \vec{B} décrits ci-dessus :

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= -\frac{\vec{n}}{c} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial}{\partial t} (\vec{n} \cdot \vec{E}) \stackrel{\text{(MG)}}{=} 0 & \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= -\frac{\vec{n}}{c} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial}{\partial t} (\vec{n} \cdot \vec{B}) \stackrel{\text{(MΦ)}}{=} 0 \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{n} \wedge \vec{E}) \stackrel{\text{(MF)}}{=} -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \vec{\nabla} \wedge \vec{B} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{n} \wedge \vec{B}) \stackrel{\text{(MA)}}{=} \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{aligned} \quad (65)$$

Les deux premières équations impliquent que les vecteurs $\vec{n} \cdot \vec{E}$ et $\vec{n} \cdot \vec{B}$ sont stationnaires (i.e. indépendants du temps). En excluant la solution où \vec{E} et \vec{B} sont uniformes et non nuls, la seule solution possible est que les composantes de \vec{E} ou \vec{B} parallèles à \vec{n} soient nulles à tout instant :

$$\text{(MG)} \quad \boxed{\vec{n} \cdot \vec{E} = 0} \quad \text{(MΦ)} \quad \boxed{\vec{n} \cdot \vec{B} = 0} \quad (66)$$

Quant aux deux dernières équations, elles imposent une égalité (à un facteur $\pm 1/c$ près) entre les dérivées partielles par rapport au temps de $\vec{n} \wedge \vec{E}$ et de \vec{B} (respectivement $\vec{n} \wedge \vec{B}$ et de \vec{E}). En intégrant par rapport à t , et en choisissant une constante d’intégration nulle, on obtient :

$$\text{(MF)} \quad \boxed{\vec{B} = \frac{\vec{n}}{c} \wedge \vec{E}} \quad \text{(MA)} \quad \boxed{\vec{E} = -c \vec{n} \wedge \vec{B}} \quad (67)$$

Des équations précédentes, on déduit un certain nombre de propriétés fondamentales des ondes électromagnétiques :

- Les vecteurs \vec{E} et \vec{B} sont orthogonaux à la direction de propagation de l’onde (\vec{n}). Ils sont donc contenus dans le plan d’onde.
- Les vecteurs \vec{E} et \vec{B} sont orthogonaux entre eux. En outre, le trièdre $(\vec{E}, \vec{B}, \vec{n})$ est un *trièdre direct* (Figure 3).
- Les normes des vecteurs \vec{E} et \vec{B} sont proportionnelles. On a :

$$\boxed{\|\vec{B}\| = \frac{1}{c} \|\vec{E}\|} \quad (68)$$

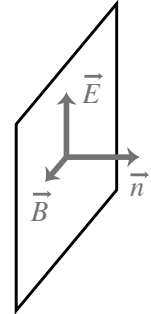


FIGURE 3

2.4 Densité et flux d’énergie électromagnétique

Lorsqu’une onde électromagnétique passe à proximité d’une charge (immobile ou en mouvement), cette dernière subit une force de Lorentz. La dernière propriété ci-dessus (équation 68) est importante lorsqu’on cherche à comparer l’intensité des forces électriques et magnétiques agissant sur cette charge. En effet, la force de Lorentz subie par la charge s’écrit :

$$\vec{F}_L = \vec{F}_e + \vec{F}_m = q \vec{E} + q \vec{v} \wedge \vec{B} = q \left(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B} \right) \Rightarrow \frac{\|\vec{F}_m\|}{\|\vec{F}_e\|} = \frac{\|\vec{v}\|}{c} \quad (69)$$

On peut donc être assuré que la force électrique domine la force magnétique tant que les vitesses des charges sont non relativistes :

$$\text{Puisque : } \|\vec{B}\| = \frac{1}{c} \|\vec{E}\|, \text{ tant que : } \|\vec{v}\| \ll c, \text{ on a : } \|\vec{F}_e\| \gg \|\vec{F}_m\|. \quad (70)$$

Dès lors, la charge subit principalement l'effet de la force électrique. Cette force correspond à l'action du champ \vec{E} sur la charge. Le champ \vec{E} effectue donc un travail. En d'autres termes, \vec{E} cède de l'énergie à la particule. Les ondes électromagnétiques impliquent donc un *transport d'énergie* depuis la région dont elles sont la source, y compris en l'absence de charges dans la région considérée ici (le vide).

Afin de déterminer la quantité d'énergie transportée par une onde électromagnétique, cherchons d'abord à mettre en évidence la forme que pourrait prendre une loi de conservation de l'énergie électromagnétique. Considérons pour cela un volume fermé $d\tau$ dans lequel est emprisonnée un nombre N de charges, chacune portant la charge q . En notant \vec{v} la vitesse des charges, la puissance cédée aux charges par le champ est de la forme :

$$\mathcal{P}_{L_{d\tau}} = N(\vec{F}_L \cdot \vec{v}) = Nq \vec{E} \cdot \vec{v} = \vec{E} \cdot \vec{j} \quad (71)$$

où $\vec{j} = Nq\vec{v}$ est la densité de courant associée au mouvement des charges⁹.

En notant w la quantité d'énergie contenue localement dans le champ à l'intérieur du volume $d\tau$, et $\vec{\Pi}$ l'énergie passant à travers la surface délimitant $d\tau$, la *loi de conservation de l'énergie* implique que la variation de l'énergie localement contenue par l'onde électromagnétique est égale à la somme (1) du flux d'énergie électromagnétique transportée à travers la surface par l'onde, depuis l'intérieur vers l'extérieur du volume et (2) de la puissance cédée par l'onde aux charges intérieures :

$$\underbrace{-\frac{\partial w}{\partial t}}_{\text{variation d'énergie}} = \underbrace{\vec{\nabla} \cdot \vec{\Pi}}_{(1) \text{ flux sortant}} + \underbrace{\vec{E} \cdot \vec{j}}_{(2) \text{ puissance cédée}} \quad (72)$$

Utilisons à présent les équations de Maxwell pour déterminer les expressions de w et $\vec{\Pi}$.

La puissance cédée par l'onde électromagnétique s'écrit :

$$\vec{E} \cdot \vec{j} \stackrel{\text{(MA)}}{=} \epsilon_0 c^2 \vec{E} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{B}) - \epsilon_0 \vec{E} \cdot \left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \quad (73)$$

Or, puisque : $\vec{\nabla} \cdot (\vec{a} \wedge \vec{b}) = \vec{b} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{a}) - \vec{a} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{b})$, on a :

$$\vec{E} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{B}) = \vec{\nabla} \cdot (\vec{B} \wedge \vec{E}) + \vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{E}) \stackrel{\text{(MF)}}{=} \vec{\nabla} \cdot (\vec{B} \wedge \vec{E}) + \vec{B} \cdot \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \quad (74)$$

D'où :

$$\vec{E} \cdot \vec{j} = \epsilon_0 \left\{ c^2 \vec{\nabla} \cdot (\vec{B} \wedge \vec{E}) - \vec{E} \cdot \left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) + c^2 \vec{B} \cdot \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \right\} \quad (75)$$

Or, on remarque que :

$$\epsilon_0 \vec{E} \cdot \left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \epsilon_0 \vec{E} \cdot \vec{E} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \epsilon_0 \|\vec{E}\|^2 \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \right) = \frac{\partial}{\partial t} (\mathcal{E}_e) \quad (76)$$

où $\mathcal{E}_e = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$ est la densité d'énergie associée à la partie électrique du champ électromagnétique. Son expression est identique en électrostatique. De même, on peut faire apparaître la densité d'énergie magnétique $\mathcal{E}_m = \frac{1}{2} \frac{1}{\mu_0} B^2$.

On aboutit finalement à une expression pouvant être identifiée avec l'équation 73 :

$$\vec{E} \cdot \vec{j} = -\frac{\partial}{\partial t} \underbrace{\left(\frac{\epsilon_0}{2} E^2 + \frac{\epsilon_0 c^2}{2} B^2 \right)}_w - \underbrace{\vec{\nabla} \cdot (\epsilon_0 c^2 \vec{E} \wedge \vec{B})}_{\vec{\Pi}} \quad (77)$$

En tenant compte du fait que $\|\vec{E}\| = c\|\vec{B}\|$ (équation 68), les expressions recherchées sont donc :

$$\boxed{\begin{cases} w = \epsilon_0 E^2 = \frac{B^2}{\mu_0} & \text{(Densité d'énergie électromagnétique)} \\ \vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{E^2}{\mu_0 c} \vec{n} = \frac{c}{\mu_0} B^2 \vec{n} & \text{(Vecteur de Poynting)} \end{cases}} \quad (78)$$

9. Attention : \vec{j} ne représente pas ici le courant donnant naissance à l'onde électromagnétique. Il s'agit du courant "local" dans la région de l'espace traversée par l'onde électromagnétique. Néanmoins, ces courants locaux (peu importe leur cause) peuvent eux-même être source d'un rayonnement électromagnétique, dès lors qu'ils sont non permanents.

On constate que le vecteur de Poynting est colinéaire à la direction de propagation de l'onde, définie par \vec{n} . Sa norme est proportionnelle au carré de l'intensité du champ électrique \vec{E} (ou du champ magnétique \vec{B}). Puisque \vec{E} est variable au cours du temps en un point fixe de l'espace, le vecteur de Poynting "local" pourra par moment s'annuler. Cela ne veut pas pour autant dire que l'énergie transportée par le champ électromagnétique est nulle : il existe un vecteur \vec{E} non nul de part et d'autre du point de l'espace considéré. Il convient donc, lorsque l'on cherche à quantifier l'énergie transportée par une onde, de calculer l'énergie moyenne passant à travers la surface pendant un temps T supérieur au temps caractéristique de variation du champ \vec{E} . Le vecteur de Poynting moyen, qui correspond à la puissance moyenne transportée par l'onde, s'écrira alors :

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \vec{\Pi}(t) dt \quad (79)$$

2.5 Impédance du vide

Pour terminer, en partant d'une analyse dimensionnelle, il est possible d'exprimer l'impédance Z du milieu lorsque celui-ci est traversé par une onde électromagnétique. Par analogie avec la loi d'Ohm ($U = RI$), l'impédance électrique a pour dimension : $[Z] = V.A^{-1}$. Par ailleurs, le champ électrique a pour dimension $[E] = V.m^{-1}$ (on s'en convainc en se rappelant que le champ électrique est le gradient d'un potentiel, c.f. équation 10). Enfin, la loi de Biot et Savart (équation 18) permet d'établir la dimension du champ magnétique : $[B] = \mu_o.A.m^{-1}$. On en déduit l'expression de l'impédance :

$$\xi = \frac{\mu_o E}{B} \quad (80)$$

Dans le vide, puisque les normes de \vec{E} et \vec{B} sont reliées (équation 68), il est possible de donner l'expression de l'impédance du vide :

$$\xi_o = \sqrt{\frac{\mu_o}{\epsilon_o}} \quad (81)$$

3 Ondes planes progressives harmoniques (OPPH)

Nous allons étudier ici le cas plus simple d'une *onde électromagnétique plane*, c'est à dire que les surfaces d'onde sont des plans, ou, en d'autres termes, que la direction de propagation de l'onde est uniforme. De plus, cette onde plane sera *harmonique*, c'est à dire que la dépendance spatio-temporelle de l'amplitude de l'onde est décrite par une fonction harmonique (un sinus ou un cosinus). Le comportement de ce type d'onde est représentatif, par exemple, du comportement d'une onde *monochromatique* produite par un LASER (longueur d'onde dans le domaine visible), ou bien par une antenne RaDAR (longueur d'onde dans le domaine des ondes centimétriques).

Pour fixer les idées, supposons que la direction de propagation de l'onde est portée par l'axe (Ox) : $\vec{k} = k.\vec{n}_x$ (Figure 4). En conséquence, les vecteurs champ électrique et magnétique s'écrivent respectivement :

$$\vec{E} \begin{cases} E_x = 0 \\ E_y = E_{oy} \cos(\omega t - kx + \varphi_1) \\ E_z = E_{oz} \cos(\omega t - kx + \varphi_2) \end{cases} \quad \vec{B} \begin{cases} B_x = 0 \\ B_y = -\frac{E_{oz}}{c} \cos(\omega t - kx + \varphi_2) \\ B_z = \frac{E_{oy}}{c} \cos(\omega t - kx + \varphi_1) \end{cases} \quad (82)$$

On voit que les composantes E_y et B_z oscillent de concert, à la même pulsation et avec la même phase à l'origine (φ_1). Les deux autres composantes des champs (E_z et B_y) oscillent à la même pulsation, mais

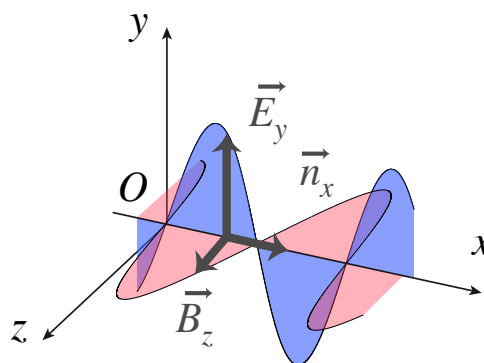


FIGURE 4

possèdent une phase à l'origine différente (φ_2). Par soucis de clarté, seules les deux composantes E_y et B_z sont représentées dans la Figure 4. Dans la suite, seules ces deux composantes seront considérées, ce qui revient à fixer $E_{oz} = 0$ et $E_{oy} \equiv E_o \neq 0$, sans perte de généralité. Avec ces hypothèses, le vecteur $\vec{E} = (E_{ox}; E_{oy}; 0)$ oscille alors dans le plan (Oxy) ¹⁰. On supposera désormais que ce plan possède une orientation quelconque par rapport aux axes (Ox) ou (Oy) (il est en revanche nécessairement normal à (Oz)). Le vecteur \vec{E}_o , amplitude réelle du champ électrique, définit alors l'orientation de ce plan. En outre, on notera $\varphi_1 = \varphi$ la phase de l'onde à l'origine ($x = 0; t = 0$). D'après ces hypothèses, l'expression de l'OPPH devient simplement :

$$\begin{cases} \vec{E}(M, t) &= \vec{E}_o \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi) \\ \vec{B}(M, t) &= \vec{B}_o \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi) \end{cases} \quad \text{avec : } \vec{B}_o = \frac{1}{c} \vec{n} \wedge \vec{E}_o \quad \text{et : } \begin{cases} \vec{E}_o \cdot \vec{n} = 0 \\ \vec{B}_o \cdot \vec{n} = 0 \end{cases} \quad (83)$$

où $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ est le vecteur position courant.

On rappelle que, sur un plan d'onde, la phase d'une telle onde s'écrit : $\Phi_p = \omega t - kx_p = \text{cste}$. La position d'un plan d'onde au cours du temps sera donc : $x_p(t) = \frac{1}{k}(\omega t + \Phi_p + \text{cste})$. On en déduit que la vitesse de phase de l'onde s'exprime : $v_\Phi = \omega/k = c$ (le vide est donc un milieu non dispersif). Les longueurs d'onde spatiale (λ) et temporelle (la période T) sont alors reliées par : $\lambda = 2\pi/k = cT = 2\pi c/\omega$ (d'où $\omega = ck$ et $\vec{k} = (\omega/c)\vec{n}$). Puisque $\vec{k} \cdot \vec{r} = k_x \cdot x + k_y \cdot y + k_z \cdot z$, la *relation de dispersion* s'écrit :

$$\|\vec{k}\|^2 = k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \omega^2/c^2 = \omega^2 \epsilon_o \mu_o \quad \text{puisque } c^2 \mu_o \epsilon_o = 1 \quad (84)$$

3.1 Représentation complexe

Sous forme complexe, l'expression de l'onde devient :

$$\vec{E} = \Re(\underline{\vec{E}}) \quad \text{avec : } \begin{cases} \underline{\vec{E}}(M, t) &= \underline{\vec{E}}_o \exp(i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})) \\ \underline{\vec{B}}(M, t) &= \underline{\vec{B}}_o \exp(i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})) \end{cases} \quad \text{et : } \begin{cases} \underline{\vec{E}}_o &= \underline{\vec{E}}_o \cdot e^{i\varphi} \quad (\text{vecteur de Jones}) \\ \underline{\vec{B}}_o &= \frac{1}{c} \vec{n} \wedge \underline{\vec{E}}_o \end{cases} \quad (85)$$

Les propriétés de dérivation de l'exponentielle permettent d'aboutir aux expressions suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\underline{\vec{E}}) &= i\omega \underline{\vec{E}} \\ \vec{k} \cdot \vec{r} = k_x \cdot x + k_y \cdot y + k_z \cdot z &\implies \frac{\partial}{\partial x}(\underline{\vec{E}}) = -ik_x \underline{\vec{E}} \implies \begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \underline{\vec{E}} = \frac{\partial \underline{E}_x}{\partial x} + \frac{\partial \underline{E}_y}{\partial y} + \frac{\partial \underline{E}_z}{\partial z} = -i\vec{k} \cdot \underline{\vec{E}} \\ \vec{\nabla} \wedge \underline{\vec{E}} = -i\vec{k} \wedge \underline{\vec{E}} \end{cases} \end{aligned} \quad (86)$$

En introduisant ces relations dans les équations de Maxwell, on retrouve les propriétés géométriques des champs déjà mentionnées dans le cas général en Section 2.3 :

$$\left. \begin{array}{l} \text{(M}\Phi\text{)} \quad -i\vec{k} \cdot \underline{\vec{B}} = 0 \implies \underline{\vec{B}} \perp \vec{n} \\ \text{(M}\mathbf{G}\text{)} \quad -i\vec{k} \cdot \underline{\vec{E}} = 0 \implies \underline{\vec{E}} \perp \vec{n} \\ \text{(M}\mathbf{A}\text{)} \quad -i\vec{k} \wedge \underline{\vec{B}} = \frac{i}{c^2} \omega \underline{\vec{E}} \implies \underline{\vec{E}} = -c \vec{n} \wedge \underline{\vec{B}} \\ \text{(M}\mathbf{F}\text{)} \quad -i\vec{k} \wedge \underline{\vec{E}} = -i\omega \underline{\vec{B}} \implies \underline{\vec{B}} = \frac{1}{c} \vec{n} \wedge \underline{\vec{E}} \end{array} \right\} \quad (87)$$

Avant de poursuivre, quelques remarques importantes à propos de la notation complexe s'imposent afin d'éviter toute confusion.

- Nous avons présenté ici le cas particulier d'un champ se propageant dans la direction (Ox) et ayant une seule composante non nulle, portée par le vecteur \vec{E}_o . Cette composante doit pouvoir être exprimée dans n'importe quelle base, et en particulier dans une base $\mathcal{B}' = (\vec{n}'_x, \vec{n}'_y, \vec{n}'_z)$

10. On verra plus tard que ces hypothèses correspondent à une onde polarisée rectilignement.

d'orientation oblique par rapport à la base "naturelle" $\mathcal{B} = (\vec{n}_x, \vec{n}_y, \vec{n}_z)$. En notations réelles, cela donne :

$$\vec{E}(x, t) = \begin{pmatrix} E_{ox} \cos(\omega t - kx + \varphi_x) \\ E_{oy} \cos(\omega t - kx + \varphi_y) \\ E_{oz} \cos(\omega t - kx + \varphi_z) \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} E_{ox'} \cos(\omega t - kx + \varphi_x) \\ E_{oy'} \cos(\omega t - kx + \varphi_y) \\ E_{oz'} \cos(\omega t - kx + \varphi_z) \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'} \quad (88)$$

On prendra garde à remarquer que seule l'expression du vecteur \vec{E}_o change lorsqu'on change de base. En revanche, la dépendance spatio-temporelle de l'onde par rapport aux variables t et x ne doit pas changer. Le passage à la notation complexe doit permettre de maintenir cette propriété :

$$\vec{E}(x, t) = \vec{E}_o e^{i(\omega t - kx)} \quad \text{avec : } \vec{E}_o = \begin{pmatrix} E_{ox'} e^{i\varphi_x} \\ E_{oy'} e^{i\varphi_y} \\ E_{oz'} e^{i\varphi_z} \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'} \in \mathbb{C} \quad (\text{vecteur de Jones}) \quad (89)$$

Puisque l'amplitude complexe \vec{E}_o possède des composantes complexes, il est clair que $\vec{E}(x, t) = \Re \{ \vec{E}(x, t) \} = \Re \{ \vec{E}_o e^{i(\omega t - kx)} \} \neq \Re \{ \vec{E}_o \} \cdot \cos(\omega t - kx)$. En effet, pour deux nombres complexes z et z' , on a $\Re(z * z') \neq \Re(z) * \Re(z')$ en général¹¹. De même, sauf cas particulier, on a $\Re(z \wedge z') \neq \Re(z) \wedge \Re(z')$ ¹². Il faut donc faire attention, lorsqu'on évalue la partie réelle d'un vecteur complexe, à d'abord vérifier si l'amplitude complexe du vecteur est réelle ou complexe. Cela ne fait aucune différence tant que k demeure réel. En revanche, lorsque $k \in \mathbb{C}$, il faut faire attention.

- Dans la continuité de la remarque précédente, on a défini le vecteur de Poynting $\vec{\Pi}$ comme le produit de deux vecteurs "réels" : $\vec{\Pi} = \frac{1}{2\mu_o} \vec{E} \wedge \vec{B}$. Qu'en est-il du vecteur de Poynting "complexe" $\vec{\underline{\Pi}}$? Ce dernier sera défini par :

$$\vec{\underline{\Pi}} = \frac{1}{2\mu_o} \vec{E} \wedge \vec{B}^* = \frac{1}{2\xi_o} \|\vec{E}\|^2 \vec{k} \quad \text{avec : } \xi_o = \sqrt{\mu_o/\epsilon_o} \quad (92)$$

où le symbole en exposant "*" indique la quantité conjuguée. Une telle définition permet de faire apparaître une propriété intéressante : la partie réelle du vecteur de Poynting complexe est égale à la valeur moyenne du vecteur de Poynting réel. En d'autres termes :

$$\Re(\vec{\underline{\Pi}}) = \frac{1}{T} \int_0^T \vec{\Pi}(t) dt = \langle \vec{\Pi} \rangle \quad (93)$$

- Dans les différents ouvrages traitant de l'électromagnétisme, on rencontre parfois la notation $\underline{\mathcal{A}}(t) = \mathcal{A} \exp(-i\omega t)$ au lieu de la notation $\mathcal{A}(t) = \mathcal{A} \exp(i\omega t)$ utilisée ici. Ces deux notations sont en fait strictement équivalentes, puisque $\Re\{\exp(-i\omega t)\} = \Re\{\exp(i\omega t)\}$.

11. Ici, le symbole "*" correspond à la simple multiplication des deux opérandes, que ceux-ci soient réels ou complexes. Il convient de le distinguer du produit scalaire, indiqué par le symbole ".". Le produit scalaire s'applique à des vecteurs, et les nombres complexes peuvent être considérés comme tels. En effet, un nombre complexe z peut s'écrire de façon équivalente comme un "nombre" $z = re^{i\theta}$ ou comme un "vecteur" $z = a + ib$. Par exemple :

$$\text{Avec } (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \text{ t.q. } \begin{cases} z_1 = r_1 e^{i\theta_1} = a_1 + ib_1 \\ z_2 = r_2 e^{i\theta_2} = a_2 + ib_2 \end{cases} \quad \text{on a : } \begin{cases} z_1 \cdot z_2 = a_1 a_2 + b_1 b_2 \in \mathbb{R} & (\text{produit scalaire}) \\ z_1 * z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)} \in \mathbb{C} & (\text{multiplication complexe}) \end{cases} \quad (90)$$

La multiplication "simple" ("*") entre deux nombres complexes renvoie donc un nouveau nombre complexe. En revanche, le produit scalaire (".") ainsi défini engendre un réel. Il est possible de modifier la définition du produit scalaire afin que le résultat soit un complexe. C'est le cas du produit scalaire hermitien défini par : $(z|z') = z * z'$, où z^* est le complexe conjugué de z (i.e. $z^* = a - ib = re^{-i\theta}$). Un tel produit scalaire (indiqué par le symbole "|") bénéficie alors de propriétés intéressantes (symétrie hermitienne, théorème de Pythagore, inégalité de Cauchy-Schwarz, etc.). Sauf mention contraire, on ne l'utilisera pas ici.

12. En fait, pour $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$ et $\theta = (\widehat{O, z_1, z_2})$, on a :

$$\begin{aligned} |z_1 \cdot z_2| &= |z_1| |z_2| \cos \theta = \Re(z_1^* * z_2) \\ |z_1 \wedge z_2| &= |z_1| |z_2| \sin \theta = \Im(z_1^* * z_2) \end{aligned} \quad (91)$$

3.2 Polarisation

3.2.1 Critère de cohérence

Dans cette section, les propriétés de polarisation des ondes électromagnétiques sont présentées. Ces propriétés sont partagées par tous les autres types d'ondes transversales (en particulier par les ondes sismiques de cisaillement). Repartons de la représentation générale de l'onde électromagnétique plane se propageant selon la direction \vec{n}_x avec $\vec{k} = k.\vec{n}_x$:

$$\vec{E} \begin{cases} E_x = 0 \\ E_y = E_{oy} \cos(\omega t - kx + \varphi_1) \\ E_z = E_{oz} \cos(\omega t - kx + \varphi_2) \end{cases} \quad \vec{B} \begin{cases} B_x = 0 \\ B_y = -\frac{E_{oz}}{c} \cos(\omega t - kx + \varphi_2) \\ B_z = \frac{E_{oy}}{c} \cos(\omega t - kx + \varphi_1) \end{cases} \quad (94)$$

Dans ces expressions, les déphasages à l'origine φ sont implicitement considérés comme des *constantes*. Cependant, pour une série de paquets d'onde émis successivement par une source donnée ou reçus successivement en point donné, ces déphasages peuvent varier au cours du temps. Une perte de *cohérence* advient lorsque la durée d'observation dépasse le *temps de cohérence* τ_c , i.e. le temps caractéristique sur lequel la valeur de φ se maintient à une valeur constante. Au delà de cette durée, les variations de φ ne permettent plus de maintenir une variation purement harmonique de \vec{E} ou \vec{B} au cours du temps sur un plan fixe situé en un x donné : les variations rapides de φ se traduisent par des "sauts" de la phase Φ . Si l'on souhaite faire *interférer* l'onde incidente avec une "copie" d'elle-même (par exemple en utilisant une lame séparatrice pour scinder le faisceau lumineux au sein d'un interféromètre de Michelson), les interférences ne pourront se manifester que si la longueur du *chemin optique* différentiel pris par l'une ou l'autre des deux ondes n'excède pas la *longueur de cohérence* $l_c = c\tau_c$. Lorsque le déphasage à l'origine varie rapidement au cours du temps, les interférences ne peuvent pas être produites. On parle alors d'onde *non polarisée* ou *polarisée aléatoirement*. Cette caractéristique est la plus fréquemment rencontrée, car elle est partagée par la plupart des sources naturelles. En effet, les sources naturelles émettent des paquets d'ondes de courtes durées à des instants aléatoires depuis chaque partie de la source. Ainsi, chaque élément du Soleil ou du fil d'une ampoule à incandescence peut être assimilé à une source individuelle. Ces sources ne peuvent donc produire d'interférences avec des montages optiques de dimensions macroscopiques (voir le tableau ci-dessous).

Source	τ_c (s)	l_c (m)
Soleil	10^{-15}	10^{-7}
LASER	10^{-8}	1
RADAR	$+\infty$	$+\infty$

En revanche, les LASER (**L**ight **A**mplification by **S**timulated **E**mission of **R**adiation) sont caractérisés par une émission quasi-monochromatique sur une durée beaucoup plus longue, du fait de la résonance de la cavité d'amplification. Enfin, les antennes RADAR (**R**adio **D**etection and **R**anging), opérant dans le domaine des ondes centimétriques, sont capables d'émettre des ondes monochromatiques parfaitement cohérentes sur une durée aussi longue que souhaitée. En effet, les éléments de l'antenne peuvent être précisément commandés pour émettre *en phase* des ondes de fréquence déterminée en faisant circuler en leur sein des courants alternatifs cadencés. Ce type de source peut ainsi être embarqué sur des avions ou des satellites afin de mesurer la distance entre l'antenne émettrice et des cibles. Il est même possible d'exploiter la cohérence des ondes RADAR afin de former des images de ces cibles et d'en étudier les déplacements avec une résolution de quelques mètres, une précision de quelques millimètres, sur des distances de plusieurs centaines de kilomètres (Radar à Synthèse d'Ouverture, ou **S**ynthetic **A**perture Radar "SAR", Interférométrie SAR, etc).

3.2.2 Ellipse de polarisation

En supposant que le déphasage à l'origine est constant (i.e. source cohérente), on voit qu'il suffit de suivre l'évolution du champ \vec{E} , en terme de longueur et de direction, pour pouvoir déterminer sans ambiguïté les caractéristiques du champ \vec{B} (équation 94). Le champ électrique \vec{E} sera donc pris comme référence,

et on notera (y, z) les coordonnées du point M situé à l'extrémité du vecteur \vec{E} dans un plan d'onde x à la date t (Figure 5) :

$$\begin{cases} y(x, t) = E_y(x, t) = E_{oy} \cos(\omega t - kx + \varphi_1) \\ z(x, t) = E_z(x, t) = E_{oz} \cos(\omega t - kx + \varphi_2) \end{cases} \quad (95)$$

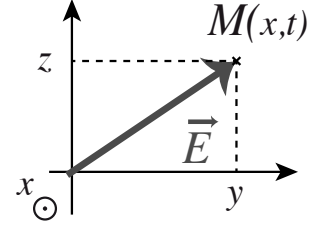


FIGURE 5

À partir de ces définitions, cherchons à déterminer l'évolution décrite par le vecteur \vec{E} en évaluant la *trajectoire* du point de coordonnées (y, z) au cours du temps. Pour simplifier l'étude, nous nous plaçons dans un plan d'onde situé en $x = 0$:

$$\begin{cases} y(x=0, t) = E_y(x=0, t) = E_{oy} \cos(\omega t + \varphi_1) = E_{oy} \{\cos(\omega t) \cos(\varphi_1) - \sin(\omega t) \sin(\varphi_1)\} \\ z(x=0, t) = E_z(x=0, t) = E_{oz} \cos(\omega t + \varphi_2) = E_{oz} \{\cos(\omega t) \cos(\varphi_2) - \sin(\omega t) \sin(\varphi_2)\} \end{cases} \quad (96)$$

Puisqu'il s'agit d'une étude de trajectoire, on cherche à éliminer le terme oscillant $(\cos \omega t, \sin \omega t)$. Sous forme matricielle, l'expression précédente donne :

$$\begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} E_{oy} \cos \varphi_1 & -E_{oy} \sin \varphi_1 \\ E_{oz} \cos \varphi_2 & -E_{oz} \sin \varphi_2 \end{bmatrix}}_M \begin{bmatrix} \cos \omega t \\ \sin \omega t \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} \cos \omega t \\ \sin \omega t \end{bmatrix} = M^{-1} \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} \quad (97)$$

La matrice inverse M^{-1} est obtenue de la façon suivante :

$$M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \implies M^{-1} = \frac{1}{\det M} {}^t \text{com } M = \frac{1}{\det M} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \quad (98)$$

où $\{\det X\}$ est le *déterminant* de la matrice X , $\{{}^t Y\}$ indique la matrice *transposée* de Y et $\{\text{com } Z\}$ est la *comatrice* de Z .

On a donc :

$$\det M = E_{oy} E_{oz} (\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_2 \cos \varphi_1) = E_{oy} E_{oz} \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \quad (99)$$

D'où :

$$\begin{aligned} M^{-1} &= \frac{1}{E_{oy} E_{oz} \sin(\varphi_1 - \varphi_2)} \begin{bmatrix} -E_{oz} \sin \varphi_2 & E_{oy} \sin \varphi_1 \\ -E_{oz} \cos \varphi_2 & E_{oy} \cos \varphi_1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{\sin(\varphi_1 - \varphi_2)} \begin{bmatrix} -\sin \varphi_2 / E_{oy} & \sin \varphi_1 / E_{oz} \\ -\cos \varphi_2 / E_{oy} & \cos \varphi_1 / E_{oy} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (100)$$

Donc :

$$\begin{cases} \cos(\omega t) \sin(\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{z}{E_{oz}} \sin \varphi_1 - \frac{y}{E_{oy}} \sin \varphi_2 & \text{(a)} \\ \sin(\omega t) \sin(\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{z}{E_{oz}} \cos \varphi_1 - \frac{y}{E_{oy}} \cos \varphi_2 & \text{(b)} \end{cases} \quad (101)$$

En effectuant l'opération $\{(a)^2 + (b)^2\}$, on obtient alors :

$$\sin^2(\varphi_1 - \varphi_2) = \left(\frac{y}{E_{oy}}\right)^2 + \left(\frac{z}{E_{oz}}\right)^2 - 2 \left(\frac{y}{E_{oy}}\right) \left(\frac{z}{E_{oz}}\right) \underbrace{(\sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + \cos \varphi_1 \cos \varphi_2)}_{\cos(\varphi_1 - \varphi_2)} \quad (102)$$

D'où finalement l'expression de la trajectoire de l'extrémité du champ \vec{E} :

$$\boxed{\left(\frac{y}{E_{oy}}\right)^2 + \left(\frac{z}{E_{oz}}\right)^2 - 2 \left(\frac{y}{E_{oy}}\right) \left(\frac{z}{E_{oz}}\right) \cos(\varphi_1 - \varphi_2) = \sin^2(\varphi_1 - \varphi_2)} \quad (103)$$

Cette expression de la forme $Ay^2 + Byz + Cz^2 + D = 0$ est celle d'une *conique*. Cette dernière n'est a priori pas alignée avec les axes (Oy) ou (Oz). Introduisons l'angle de rotation Ψ du système de coordonnées (y, z) de telle sorte que celui-ci soit transformé en un système de coordonnées (y', z') aligné sur la conique (Figure 6) :

$$\begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \Psi & -\sin \Psi \\ \sin \Psi & \cos \Psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y' \cos \Psi - z' \sin \Psi \\ y' \sin \Psi + z' \cos \Psi \end{bmatrix}, \quad (104)$$

Pour que les axes (y', z') soient alignés sur la conique, il faut que $A'y'^2 + B'y'z' + Cz'^2 + D = 0$ avec $B' = 0$. En remplaçant les nouvelles coordonnées dans l'équation $Ay^2 + Byz + Cz^2 + D = 0$, cela donne¹³ :

$$\begin{aligned} A(y' \cos \Psi - z' \sin \Psi)^2 + B(y' \cos \Psi - z' \sin \Psi)(y' \sin \Psi + z' \cos \Psi) + C(y' \sin \Psi + z' \cos \Psi)^2 + D &= 0 \\ \implies B' = -2A \cos \Psi \sin \Psi + B(\cos^2 \Psi - \sin^2 \Psi) + 2C \cos \Psi \sin \Psi = (C - A) \sin 2\Psi + B \cos 2\Psi & \end{aligned} \quad (105)$$

La condition $B' = 0$ implique donc :

$$\begin{aligned} \tan 2\Psi &= \frac{B}{A - C} \\ &= \frac{-2 \frac{\cos(\varphi_1 - \varphi_2)}{E_{oy} E_{oz}}}{\frac{1}{E_{oy}^2} - \frac{1}{E_{oz}^2}} \\ &= \frac{2E_{oy} E_{oz} \cos(\varphi_1 - \varphi_2)}{E_{oz}^2 - E_{oy}^2} \end{aligned} \quad (106)$$

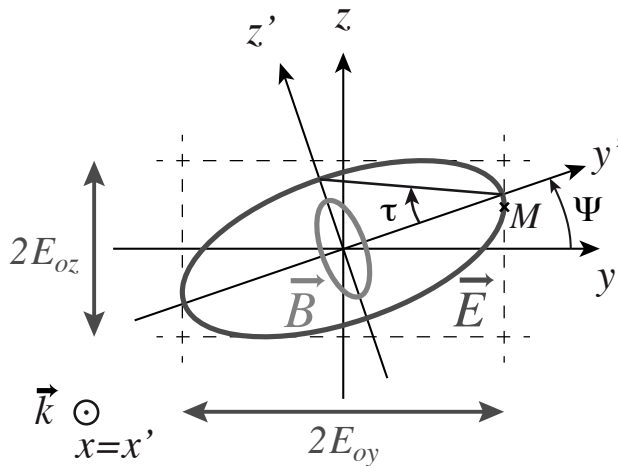


FIGURE 6

Il s'agit ici de l'équation d'une *ellipse* : au cours du temps, l'extrémité du vecteur \vec{E} parcourt une ellipse alignée sur les axes (Oy') et (Oz') (Figure 6). La rotation de \vec{E} le long de l'ellipse s'effectue à la pulsation ω . Le vecteur \vec{B} parcourt lui aussi une ellipse orientée à 90° de l'ellipse associée à \vec{E} .

Le sens de parcours de l'ellipse par \vec{E} définit le *sens* de polarisation de l'onde électromagnétique. On dit que la polarisation est droite (respectivement gauche) si un observateur regardant dans la direction de propagation de l'onde (i.e. dans la direction \vec{n}_x) depuis la source voyait le champ électrique "tourner" dans le sens horaire (respectivement dans le sens anti-horaire) (Figure 7).

Pour déterminer le sens de polarisation d'une onde, on peut donc étudier le signe de dE_z/dt lorsque la composante E_y est maximale. La dérivée de E_z par rapport à t s'écrit :

$$\frac{dE_z(x, t)}{dt} = -\omega E_{oz} \sin(\omega t - kx + \varphi_2) \quad (108)$$

Le point particulier de l'ellipse correspondant au maximum de la composante E_y est le point M tel que $E_y(M) = E_{oy}$ (Figure 6). D'après l'équation 95, cette condition implique que la relation suivante entre x et t doit être vérifiée en M : $\omega t - kx + \varphi_1 = 0$. Ceci permet d'exprimer la variation de E_z

Finalement, l'équation $A'y'^2 + Cz'^2 + D = 0$ peut s'écrire sous la forme :

$$\frac{y'^2}{a^2} + \frac{z'^2}{b^2} = 1 \quad (107)$$

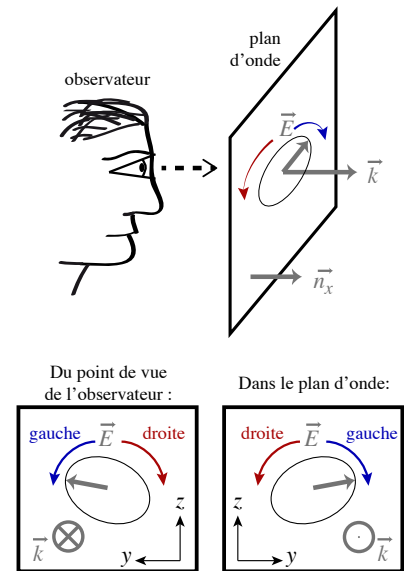


FIGURE 7

13. En appliquant les formules :
 $\sin 2\Psi = 2 \sin \Psi \cos \Psi$ et $\cos 2\Psi = \cos^2 \Psi - \sin^2 \Psi$.

en M :

$$\frac{dE_z(M)}{dt} = -\omega E_{oz} \sin(\varphi_2 - \varphi_1) \quad (109)$$

On a donc :

$$\begin{cases} \frac{dE_z}{dt} < 0 \implies \sin(\varphi_2 - \varphi_1) > 0 \implies \text{polarisation gauche} \\ \frac{dE_z}{dt} > 0 \implies \sin(\varphi_2 - \varphi_1) < 0 \implies \text{polarisation droite} \end{cases} \quad (110)$$

3.2.3 Etats de polarisation particuliers

— *Polarisation elliptique* : φ_1 et φ_2 quelconques.

Lorsque φ_1 et φ_2 ont des valeurs quelconques, l'état de polarisation associé est quelconque : l'extrémité du vecteur \vec{E} balaye l'ellipse décrite ci-dessus. Il est possible que l'ellipse soit alignée avec l'axe (Oy) ou (Oz) , mais cela n'a pas de raison d'être le cas en général.

— *Polarisation rectiligne* : $\varphi_1 = \varphi_2$.

La polarisation rectiligne correspond à la configuration dans laquelle l'ellipse est complètement "aplatis". En d'autres termes, la direction prise par \vec{E} reste constante, seule son amplitude et son sens changent au cours du temps. Les coordonnées y et z sont alors proportionnelles, ce qui implique que $\varphi_1 = \varphi_2$ (équation 95). On a alors : $z = \pm \frac{E_{oz}}{E_{oy}} y$. L'angle Ψ permet alors de définir la configuration de la polarisation. Par exemple, pour une onde se propageant dans la direction \vec{n}_x horizontale, si $\vec{E}(x, t) = E_z(x, t) \cdot \vec{n}_z$, alors l'onde est polarisée *verticalement*. Si $\vec{E}(x, t) = E_y(x, t) \cdot \vec{n}_y$, l'onde est polarisée *horizontalement*.

— *Polarisation circulaire* : $\varphi_1 = \varphi_2 + \frac{\pi}{2}$ [modulo π] et $E_{oy} = E_{oz}$.

La polarisation circulaire correspond à une polarisation elliptique dans laquelle les longueurs du grand axe et du petit axe de l'ellipse sont égales. Cette configuration impose alors l'égalité $E_{oy} = E_{oz}$. En outre, pour que le point M demeure à une distance constante de l'origine, il faut que $y^2 + z^2 = \text{cste}$. Cette condition implique que : $\cos^2(\omega t - kx + \varphi_1) + \cos^2(\omega t - kx + \varphi_2) = \text{cste}$, $\forall(t, x)$ (équation 95). La seule possibilité est alors : $\varphi_1 = \varphi_2 + \frac{\pi}{2}$ [modulo π] = $\varphi_2 + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Avec $\varphi_1 = \varphi_2 + \frac{\pi}{2}$, le sens de polarisation de l'onde est "droite". Avec $\varphi_1 = \varphi_2 - \frac{\pi}{2}$, le sens est "gauche".

3.2.4 Décomposition

On peut montrer qu'un état de polarisation quelconque (i.e. elliptique) peut être obtenu en superposant (i.e. en additionnant) deux ondes polarisées rectilignement selon deux directions perpendiculaires. En effet, en partant par exemple de deux ondes polarisées rectilignement dans les directions (Oy) et (Oz) :

$$\textcircled{1} \begin{cases} E_y^1 = E_1 \cos(\omega t - kx + \varphi_1) \\ E_z^1 = 0 \end{cases} \quad \textcircled{2} \begin{cases} E_y^2 = 0 \\ E_z^2 = E_2 \cos(\omega t - kx + \varphi_2) \end{cases} \quad (111)$$

$$\textcircled{1} + \textcircled{2} \begin{cases} E_y = E_1 \cos(\omega t - kx + \varphi_1) \\ E_z = E_2 \cos(\omega t - kx + \varphi_2) \end{cases}$$

Les amplitudes (E_1, E_2) et les déphasages (φ_1, φ_2) relatifs des deux ondes initiales permettent alors d'obtenir n'importe quel état de polarisation pour l'onde résultante.

De même, l'état de polarisation rectiligne peut être obtenu par superposition de deux ondes polarisées circulairement, tournant dans deux sens opposés (droite et gauche) et de même amplitude (E_o) . Pour le démontrer, notons (φ_1, φ_2) les déphasages à l'origine associés à la première onde, polarisée circulairement à droite, et (φ'_1, φ'_2) les déphasages à l'origine associés à la seconde onde, polarisée circulairement à gauche.

Pour simplifier, supposons $\varphi_2 = 0$. D'après les hypothèses décrites ci-dessus, on a :

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad \varphi_1 = \varphi_2 + \frac{\pi}{2} \text{ avec : } \varphi_2 = 0 &\implies \begin{cases} E_y^1 = E_o \cos(\omega t - kx + \varphi_1) = -E_o \sin(\omega t - kx) \\ E_z^1 = E_o \cos(\omega t - kx + \varphi_2) = E_o \cos(\omega t - kx) \end{cases} \\ \textcircled{2} \quad \varphi_1 = \varphi_2 - \frac{\pi}{2} &\implies \begin{cases} E_y^2 = E_o \cos(\omega t - kx + \varphi_1) = E_o \sin(\omega t - kx + \varphi_2) \\ E_z^2 = E_o \cos(\omega t - kx + \varphi_2) = E_o \cos(\omega t - kx + \varphi_2) \end{cases} \end{aligned} \quad (112)$$

Alors :

$$\textcircled{1} + \textcircled{2} \quad \begin{cases} E_y = -E_o [\sin(\omega t - kx + \varphi_2) - \sin(\omega t - kx)] \\ E_z = E_o [\cos(\omega t - kx + \varphi_2) + \cos(\omega t - kx)] \end{cases} \quad (113)$$

En appliquant quelques formules de trigonométrie¹⁴, l'expression de l'onde résultante peut être réarrangée sous la forme :

$$\textcircled{1} + \textcircled{2} \quad \begin{cases} E_y = -2E_o \cos\left(\omega t - kx + \frac{\varphi_2}{2}\right) \sin \frac{\varphi_2}{2} \\ E_z = 2E_o \cos\left(\omega t - kx + \frac{\varphi_2}{2}\right) \cos \frac{\varphi_2}{2} \end{cases} \implies E_z = -E_y \tan \frac{\varphi_2}{2} \quad (114)$$

Cette dernière expression correspond bien à un état de polarisation rectiligne.

Les implications de ces deux propriétés sont importantes. En effet, ces propriétés signifient qu'un onde dans un état de polarisation quelconque (resp. rectiligne) peut être *décomposée* comme la somme de deux ondes de polarisations rectilignes (resp. circulaires). Si l'on est, par exemple, en mesure de connaître le comportement d'une onde polarisée rectilignement lorsque celle-ci traverse un milieu donné (par exemple pour un matériau *anisotrope*, voir Section 3.2.6), il est alors aisé de déterminer le comportement de l'onde "totale", envisagée comme la superposition de deux ondes polarisées rectilignement.

3.2.5 Obtention d'une onde polarisée rectilignement

Avant de poursuivre, posons nous la question de la manière d'obtenir des ondes polarisées rectilignement. Cela peut se faire de plusieurs manières. Il est possible de partir d'une source "naturelle" de lumière non polarisée, et d'en extraire les trains d'onde correspondant à la direction de polarisation voulue. Pour ce faire, il est nécessaire de faire passer la lumière par un *filtre polarisant* ou *polariseur*. Une manière artisanale de produire un tel filtre est de se munir d'une feuille d'emballage plastique alimentaire (type cellophane)

et d'étirer la feuille

dans une direction (Figure 8).

Initialement organisées de façon isotrope, les chaînes de polymère constituant le matériau vont alors s'aligner de façon préférentielle

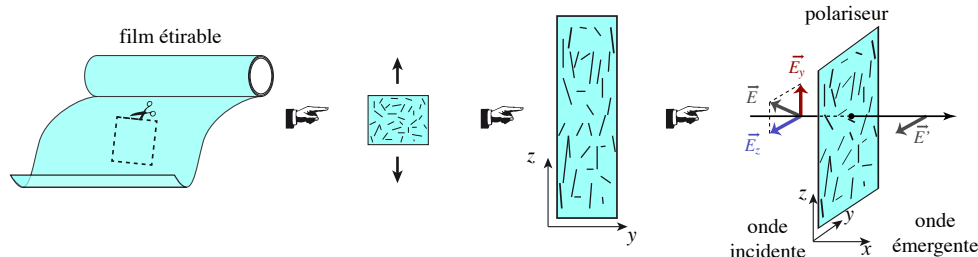


FIGURE 8

dans la direction d'étirement. Lorsqu'une onde lumineuse tentera de traverser ce matériaux transparent, la composante du champ \vec{E} parallèle aux chaînes moléculaires va interagir selon la direction d'étirement avec les électrons des chaînes, et sera alors réfléchi. Seule la composante résiduelle sera transmise à travers le film. En conséquence, l'intensité lumineuse traversant le film sera réduite (d'un facteur deux).

14.

$$\begin{aligned} \sin p - \sin q &= 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \implies \sin(a+b) - \sin a = 2 \cos\left(a + \frac{b}{2}\right) \sin\left(\frac{b}{2}\right) \\ \cos p + \cos q &= 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \implies \cos(a+b) + \cos a = 2 \cos\left(a + \frac{b}{2}\right) \cos\left(\frac{b}{2}\right) \end{aligned}$$

Il est ensuite possible de tester l'efficacité de ce polariseur en plaçant deux polariseurs en série : un premier polariseur permet de polariser la lumière incidente, un second polariseur (l'*analyseur*) permet d'analyser l'état de polarisation de la lumière sortante

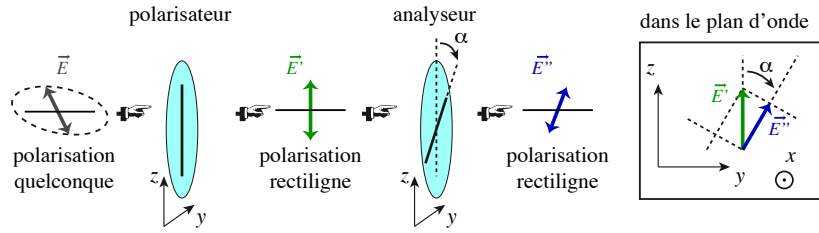


FIGURE 9

(Figure 9). Lorsque l'analyseur est tourné d'un angle α par rapport au polariseur, l'amplitude du champ \vec{E}'' obtenu en sortie de l'analyseur est reliée à l'amplitude du champ issu du polariseur \vec{E}' par :

$$||\vec{E}''|| = ||\vec{E}'|| \cos \alpha \tag{115}$$

Puisque l'intensité de la lumière I est égale à la puissance transportée par l'onde électromagnétique par unité de surface, I est aussi égale à la valeur moyenne du vecteur de Poynting :

$$I = \langle \Pi \rangle = c \langle w \rangle = c\epsilon_0 \langle E'^2 \rangle \tag{116}$$

On obtient alors la loi reliant l'intensité de la lumière arrivant sur l'analyseur I' et l'intensité de la lumière émergent en sortie de l'analyseur I'' en fonction de l'angle de rotation α entre le polariseur et l'analyseur :

$$I'' = I' \cos^2 \alpha \quad (\text{loi de Malus}) \tag{117}$$

Ainsi, si l'analyseur et le polarisateur sont croisés, on détecte une *extinction* de la lumière émergente : $\alpha = \pi/2 \implies I'' = 0$.

Pour conclure, comme il l'a été mentionné brièvement plus haut, on peut noter qu'il est possible de générer une onde électromagnétique polarisée rectilignement à l'aide d'une *antenne planaire*. Ce type d'antenne est constitué d'un réseau de conducteurs organisés de telle sorte que des *courants surfaciques* et *alternatifs* circulent dans une direction précise sur le plan de l'antenne. Conséquence de l'existence de ces courants variables, une onde électromagnétique se propagera à partir de l'antenne dans les trois directions de l'espace. La densité de puissance rayonnée \mathcal{P} dans une direction donnée est égale à la valeur moyenne du vecteur de Poynting :

$$\mathcal{P} = \langle \Pi \rangle = ||\Re(\vec{\Pi})|| \tag{118}$$

La forme de l'antenne déterminera la puissance rayonnée dans chaque direction de l'espace. Pour une antenne *isotrope*, la puissance rayonnée à travers une surface est la même dans toutes les directions, et ne dépend que de la distance r :

$$\mathcal{P}(r) = \frac{\mathcal{P}_t}{4\pi r^2} \quad \text{unité : } [W.m^{-2}] \tag{119}$$

où \mathcal{P}_t est la puissance totale rayonnée par l'antenne et $4\pi r^2$ est la surface de la sphère de rayon r . Pour une antenne réelle, il existe des directions privilégiées vers lesquelles davantage d'énergie est rayonnée :

$$\mathcal{P}(r, \theta, \phi) = G(r, \theta, \phi) \frac{\mathcal{P}_t}{4\pi r^2} \tag{120}$$

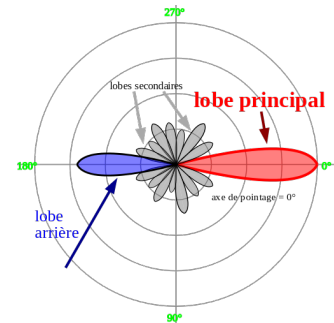


FIGURE 10

où la fonction de *gain* G permet de définir le *diagramme de rayonnement* de l'antenne (Figure 10). On le représente communément sous forme de lobes dont l'embonpoint indique qu'une grande quantité d'énergie est dirigée dans certaines directions. Les lobes sont souvent multiples, et il est généralement difficile de produire une antenne très directive, i.e. dont les lobes secondaires sont très petits par rapport au lobe principal. Mentionnons au passage que, pour les antennes planaires en champ lointain, le diagramme de rayonnement est égal à la transformée de Fourier de la fonction d'illumination de l'antenne, c'est à dire de la distribution (en espace et en temps) des courants sur le plan de l'antenne. Cette propriété est utilisée lors du design des antennes afin de les rendre plus directives. Il est également possible de

déphaser les courants en fonction de la position sur l'antenne, ce qui a pour effet de "dépointer" le lobe principal en le dirigeant dans une direction différente de la normale à l'antenne, comme si l'on avait effectué une rotation physique de l'antenne. Une application concrète des propriétés de polarisation et de rayonnement des antennes planaires est le système d'antennes RADAR embarquées par les satellites imageurs d'observation de la Terre utilisant la technologie SAR (e.g. le satellite allemand TerraSAR-X).

3.2.6 Substances biréfringentes

Une substance est dite *biréfringente* si elle est caractérisée par une *anisotropie* de la vitesse de propagation des ondes la traversant. En d'autres termes, les ondes traversant une substance biréfringente ne se propagent pas à la même vitesse selon leur direction de polarisation. On suppose en général qu'il existe deux directions perpendiculaires (les lignes neutres) selon lesquelles l'anomalie de vitesse est extrême (maximale selon l'axe "rapide", minimale selon l'axe "lent"), et que toute autre direction est caractérisée par une vitesse intermédiaire. Par exemple, selon la direction (Oy), la vitesse est $v_y = c/n_y$ et selon la direction (Oz), la vitesse est $v_z = c/n_z$, où c est la vitesse de la lumière dans le vide et $n_{x,y}$ est l'*indice de réfraction* du matériau. Supposons que $v_z > v_y$ (donc $n_z < n_y$), de telle sorte que (Oy) soit l'axe lent et (Oz) l'axe rapide. Imaginons que ce type de matériau est confiné à une région de l'espace comprise entre les plans $x = 0$ et $x = e$ et qu'une onde incidente se propageant dans le vide environnant dans la direction \vec{n}_x traverse le matériau. Le matériau se présente alors sous la forme d'une lame d'épaisseur e (Figure 11). À l'entrée de la lame, le champ \vec{E} s'écrit :

$$\vec{E} \begin{cases} E_y = E_{oy} \cos(\omega t - kx + \varphi_1) \\ E_z = E_{oz} \cos(\omega t - kx + \varphi_2) \end{cases} \quad (121)$$

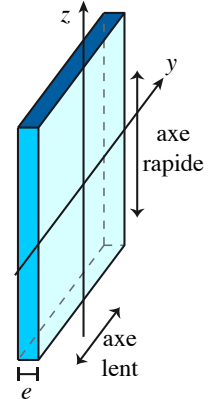


FIGURE 11

Au passage dans la lame, la pulsation ω de l'onde est conservée. La direction de propagation de l'onde étant normale au *dioptré* (i.e. l'interface vide/milieu), celle-ci ne change pas non plus. En revanche, la vitesse de propagation diminue, passant de c à v . En conséquence, le vecteur d'onde k change de norme. On a alors :

$$\text{dans le vide : } k = \frac{\omega}{c} \quad ; \quad \text{dans la lame : } k' = \frac{\omega}{v} = \frac{\omega}{c/n} \quad (122)$$

Par conséquent, après la traversée de la lame de durée e/v , l'onde subit un "retard" Δt par rapport à une propagation dans le vide d'une durée e/c . Ce retard s'exprime donc :

$$\Delta t = \frac{e}{v} - \frac{e}{c} = \frac{k' - k}{\omega} e = \frac{\Delta k}{\omega} e \quad (123)$$

À la sortie de la lame, le champ \vec{E}' s'écrit alors :

$$\vec{E}' \begin{cases} E'_y = E_{oy} \cos(\omega t - k(x - e) - k'_y e + \varphi_1) = E_{oy} \cos(\omega t - kx + \Phi_1) \\ E'_z = E_{oz} \cos(\omega t - k(x - e) - k'_z e + \varphi_2) = E_{oz} \cos(\omega t - kx + \Phi_2) \end{cases} \quad (124)$$

avec :

$\underbrace{\Phi_2 - \Phi_1}_{\text{en sortie}} = \underbrace{\varphi_2 - \varphi_1}_{\text{à l'entrée}} + \underbrace{(k'_y - k'_z)e}_{\text{traversée}} = \varphi_2 - \varphi_1 + \frac{\omega e}{c}(n_y - n_z)$

On constate ainsi une *modification de l'état de polarisation* à la traversée de la lame : par exemple, si l'onde incidente était polarisée rectilignement ($\varphi_2 - \varphi_1 = 0$), alors l'onde émergente risque fort d'avoir perdu cette propriété ($\Phi_2 - \Phi_1 \neq 0$ a priori).

Plus précisément, pour une onde incidente polarisée rectilignement et de la forme :

$$\begin{cases} E_y = E_{oy} \cos(\omega t - kx + \varphi) \\ E_z = E_{oz} \cos(\omega t - kx + \varphi) \end{cases} \implies E_y/E_z = \text{cste} \quad (125)$$

L'onde émergente sera de la forme :

$$\begin{cases} E'_y = E_{oy} \cos(\omega t - kx + \Phi) \\ E'_z = E_{oz} \cos\left(\omega t - kx + \Phi + \frac{\omega e}{c}(n_y - n_z)\right) \end{cases} \implies E'_y/E'_z \neq \text{cste} \quad (126)$$

La polarisation de sortie sera donc elliptique, dans le cas général. On ne retrouve une polarisation rectiligne que dans le cas où $E_{oy} = 0$ ou bien $E_{oz} = 0$, c'est à dire si l'onde incidente est polarisée rectilignement selon une des lignes neutres de la lame.

En adaptant l'épaisseur de la lame, il est possible de transformer de manière contrôlée l'état de polarisation d'une onde. Plusieurs possibilités s'offrent à l'expérimentation¹⁵.

— *Lame demi-onde* : $|e(n_y - n_z)| = \frac{\lambda}{2} \implies \Phi_2 - \Phi_1 = \varphi_2 - \varphi_1 \pm \pi$.

Partant d'un état de polarisation elliptique en entrée défini par (équation 103) :

$$\left(\frac{y}{E_{oy}}\right)^2 + \left(\frac{z}{E_{oz}}\right)^2 - 2\left(\frac{y}{E_{oy}}\right)\left(\frac{z}{E_{oz}}\right)\cos(\varphi_1 - \varphi_2) = \sin^2(\varphi_1 - \varphi_2) \quad (127)$$

l'état de polarisation en sortie devient :

$$\left(\frac{y'}{E_{oy}}\right)^2 + \left(\frac{z'}{E_{oz}}\right)^2 + 2\left(\frac{y'}{E_{oy}}\right)\left(\frac{z'}{E_{oz}}\right)\cos(\Phi_1 - \Phi_2) = \sin^2(\Phi_1 - \Phi_2) \quad (128)$$

L'onde obtenue en sortie correspond donc au symétrique de l'onde initiale par rapport à l'axe (Oy) (ou, de façon équivalente, par rapport à (Oz)). Le sens de polarisation est retourné : si l'onde incidente est polarisée "à droite" ($\sin(\varphi_1 - \varphi_2) < 0$), l'onde émergente est polarisée "à gauche" ($\sin(\Phi_1 - \Phi_2) > 0$). Une telle lame induit donc un *retournement* de l'onde incidente.

— *Lame quart d'onde* : $|e(n_y - n_z)| = \frac{\lambda}{4} \implies \Phi_2 - \Phi_1 = \varphi_2 - \varphi_1 \pm \frac{\pi}{2}$.

Dans ce cas, une onde polarisée rectilignement peut se transformer en une onde polarisée circulairement, et vice-versa :

— polarisation rectiligne ($\varphi_2 = \varphi_1$) : $\left(\frac{y}{E_{oy}}\right)^2 + \left(\frac{z}{E_{oz}}\right)^2 - 2\left(\frac{y}{E_{oy}}\right)\left(\frac{z}{E_{oz}}\right) = 0$.

$\hookrightarrow \left(\frac{y'}{E_{oy}}\right)^2 + \left(\frac{z'}{E_{oz}}\right)^2 = 1$: polarisation elliptique et alignée sur les axes neutres.

— polarisation rectiligne et alignée sur la bissectrice des axes neutres ($E_{oy} = E_{oz} = E_o$).

$\hookrightarrow \left(\frac{y'}{E_o}\right)^2 + \left(\frac{z'}{E_o}\right)^2 = 1$: polarisation circulaire.

— polarisation circulaire droite ($\varphi_2 = \varphi_1 + \frac{\pi}{2}$ et $E_{oy} = E_{oz} = E_o$) : $\left(\frac{y}{E_o}\right)^2 + \left(\frac{z}{E_o}\right)^2 = 1$

$\hookrightarrow \left(\frac{y'}{E_o}\right)^2 + \left(\frac{z'}{E_o}\right)^2 - 2\left(\frac{y'}{E_o}\right)\left(\frac{z'}{E_o}\right) = 0$: polarisation rectiligne.

— polarisation elliptique et alignée sur les axes neutres ($\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{\pi}{2}$) : $\left(\frac{y}{E_{oy}}\right)^2 + \left(\frac{z}{E_{oz}}\right)^2 = 1$

$\hookrightarrow \left(\frac{y'}{E_{oy}}\right)^2 + \left(\frac{z'}{E_{oz}}\right)^2 - 2\left(\frac{y'}{E_{oy}}\right)\left(\frac{z'}{E_{oz}}\right) = 0$: polarisation rectiligne.

Références

- Feynman, R., Leighton, R., Sands, M., 1999. Le cours de physique de feynman, électromagnétisme 1.
- Nicolas, M., 2009. Ondes et électromagnétisme. Dunod.
- Orfanidis, S. J., 2002. Electromagnetic waves and antennas. <http://ecweb1.rutgers.edu/~orfanidi/ewa>.
- Pérez, J.-P., Carles, R., Fleckinger, R., 1996. Electromagnétisme : fondements et applications avec 300 exercices et problèmes résolus. Masson.
- Zangwill, A., 2012. Modern electrodynamics. Cambridge University Press.

15. On rappelle que la longueur d'onde dans le vide λ est reliée à la pulsation ω via la relation : $\lambda = cT = 2\pi c/\omega$